線形代数続論 2021 年度筆答式レポート第一回解答例

1. $(x, y, z, u) = (s, 12 + 4s - 4t, t, 13 + 7s - 6t)$　　$(s,\ t$ は任意の定数$)$
(解の記述は一意的ではない)

2. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ (ただし $i = \sqrt{-1}$)

4. (1) 固有値 1 (3 重根), 固有空間の基底 ${}^t(1, 0, 0)$
(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. (1) 固有値 -1 (2 重根), 固有空間の基底 ${}^t(0, 0, 1, 0)$
固有値 1 (2 重根), 固有空間の基底 ${}^t(0, 1, 0, 0)$, ${}^t(2, 0, -2, 3)$
(2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (1) 固有値 -1 (4 重根), 固有空間の基底 ${}^t(1, 0, 0, 0)$, ${}^t(1, 0, 0, -1)$, ${}^t(0, 1, 0, -1)$
(2) $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $(P^{-1}AP)^n = S^n + nS^{n-1}N = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ である。よって $A^n = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n + n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ -n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} \end{pmatrix}$ である。

9. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ をそれぞれ λ, μ に対する固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$ である。

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} &= ({}^tA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

であり、$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

参考：6 の固有多項式の計算例. 成分に同じ数が多いことに注目して変形すれば楽に計算できる。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x+2 & 3 & -3 & 3 \\ -6 & x-7 & 6 & -6 \\ -5 & -5 & x+4 & -5 \\ -2 & -2 & 2 & x-3 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} x+2 & -x+1 & x-1 & -x+1 \\ -6 & x-1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & x-1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)^3 \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)^3 \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)^4
\end{aligned}
$$