集合論・期末試験 (2005/2/1)

1. 命題 P, Q とそれに関する命題 $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $\neg P$, $P \Rightarrow Q$ の真理表を完成させよ。(解答用紙の空欄を埋めよ。) [すべて正解で 10 点。一つ間違えるごとに -2 点]

2. a を正の実数とし、閉区間 $I_a = [-a, a]$ を考える。このとき $\bigcap_{a>0} I_a = \{0\}$ であることを証明せよ。ただし、共通部分は a がすべての正の実数を動くという意味である。[5 点]

3. 集合 A, B について $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ を証明せよ。[5 点]

4. $f : X \to Y$ を写像とし A, B を X の部分集合とする。$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ を証明し、また等号が成立しない例を具体的に一つ書け。[5 点]

5. $f : A \to B,\ \ g : B \to C$ を写像とする。$f,\ g$ が共に単射であるならば $g \circ f$ も単射であることを証明せよ。[5 点]

6. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ とする。A に次の (i), (ii) で関係 $\leq$ を定義する。$(a_1, a_2),\ (b_1, b_2) \in A$ とする。

   (i) $a_1 < b_1$ ならば $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ とする。

   (ii) $a_1 = b_1$ のとき $a_2 \leq b_2$ ならば $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ とする。

   このとき次の問に答えよ。

   (1) A 上の関係 $\leq$ は順序関係であることを証明せよ。[5 点]

   (2) A 上の関係 $\leq$ は全順序か、整列順序か、をそれぞれ答えよ。[説明不要。両方正解で 5 点、片方正解で 2 点]

7. M を複素数を成分とする 2 次正方行列全体の集合とする。$A,\ B \in M$ に対して、正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき $A \sim B$ と定める。このとき、関係 $\sim$ は同値関係であることを証明せよ。[5 点]

8. $n \in \mathbb{N}$ を一つ固定する。$a,\ b \in \mathbb{Z}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ があって $a - b = \ell n$ となるとき $a \equiv b \pmod{n}$ と定める。このときこの関係は同値関係である。$a \in \mathbb{Z}$ を含む同値類を $a + n\mathbb{Z}$ と書き、同値類全体の集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表す。

   (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の積を $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ で定めたい。これが矛盾なく定義できることを証明せよ。[5 点]

   (2) $m \in \mathbb{N}$ も固定する。$s \in \mathbb{Z}$ に対して、写像 $f_s : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を $f_s(a+n\mathbb{Z}) = sa+m\mathbb{Z}$ で定めたい。これが矛盾なく定義できるための必要十分条件を n, m, s に関する条件で書け。[5 点]

9. $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への全単射 f を一つ考え、それを明確に記述せよ。[5 点]