

## 集合論・中間試験 (2006/11/30)

1. 次の命題について以下の問に答えよ。[5点 × 2]

$$\forall a \in \mathbb{N} (\exists r \in \mathbb{R} (a < r))$$

- (1) この命題を通常の記事として書け。
  - (2) この命題の否定を通常の記事として書け。
2.  $P$  と  $Q$  を命題とする。このとき命題  $\neg(P \Rightarrow Q)$  の必要十分条件は  $(\neg P) \wedge Q$  であることを示せ。(例えば真理表を用いよ。) [5点]
3.  $A, B, C$  を集合とする。 $A \cap B = A \cap C$  かつ  $A \cup B = A \cup C$  であることと、 $B = C$  であることは同値であることを示せ。[5点]
4. べき集合 (power set) の定義を答えよ。また  $A = \{1, 2\}$  であるとき、 $A$  のべき集合を具体的に要素を書きあげることによって表せ。[5点]
5. 空集合はただ一つであることを示せ。ただし空集合の存在は仮定してよい。[5点]
6.  $\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$  とおく。 $r \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $I_r = \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x < r\}$  と定める。このとき以下の問に答えよ。[5点 × 2]
- (1)  $\bigcap_{r \in \mathbb{R}_{>0}} I_r = \{0\}$  を証明せよ。
  - (2)  $\bigcup_{r \in \mathbb{R}_{>0}} I_r = \mathbb{R}$  を証明せよ。
7. 二つの写像  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  について、以下の問に答えよ。[5点 × 2]
- (1)  $f, g$  共に単射であるならば、合成写像  $g \circ f$  も単射であることを示せ。
  - (2) 合成写像  $g \circ f$  が全射であるならば、 $g$  は全射であることを示せ。
8. 以下の条件をみたす写像  $f$  を具体的に作れ。[5点 × 2]
- (1)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  であって、全射ではあるが単射ではないもの。
  - (2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  であって、単射ではあるが全射ではないもの。