集合論・期末試験 (2007/2/1)

[各 5 点, 合計 70 点]

1. 「任意の実数 r に対して、$r^2 < n$ となる自然数 n が存在する」という命題の逆の命題を文章として書け。[5 点]

2. 集合 A, B, C に対して $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示せ。[5 点]

3. $f : A \to B,\ g : B \to C$ を写像とする。[5 点 $\times$ 2]

   (1) 合成写像 $g \circ f$ が単射であるとき、f は単射であることを示せ。

   (2) $f,\ g$ 共に全射であるとき、合成写像 $g \circ f$ は全射であることを示せ。

4. $f : X \to Y$ を写像とする。A, B を X の部分集合とするとき $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を示せ。[5 点]

5. 整列集合の定義と、その一つの例を答えよ。[5 点]

6. n を自然数とする。$M_n(\mathbb{R})$ で実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を表すことにする。$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して「ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ である」ときに $A \sim B$ であると定める。このとき $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係であることを示せ。[5 点]

7. n を自然数とする。$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合とする。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して「ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $a - b = n\ell$ である」ときに $a \sim b$ であると定める。 [5 点 $\times$ 2]

   (1) $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。

   (2) $\sim$ による同値類全体の集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表し、a を含む同値類を $a + n\mathbb{Z}$ と書くことにする。このとき二項演算 (加法) $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されることを示せ。

8. 次のようなものの例を具体的に示せ。ただし、それがその性質を持つことを証明しなくてもよい。また、順序集合については、集合だけでなく、どのような順序を考えるのかを明らかにすること。[5 点 $\times$ 5]

   (1) 集合 X, Y と X の部分集合 A, B、および写像 $f : X \to Y$ で、$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ となるもの。

   (2) 全順序集合でない順序集合。

   (3) 整列集合でない全順序集合。

   (4) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とするとき、$R = \{(1, 2),\ (2, 3),\ (4, 5)\}$ を含む A 上の最小の同値関係。

   (5) 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とするとき、$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} - \{0\}$ への全単射。