

集合論・中間試験 (2007/11/29)

1. X, Y は集合、 $P(x, y)$ は $x \in X$ と $y \in Y$ に関する命題であるとする。命題「任意の $x \in X$ に対して、ある $y \in Y$ が存在して $P(x, y)$ は真である」の否定を通常の記事として記述せよ。[5 点]
2. A, B を命題とする。命題「 $A \implies B$ 」の否定を求めよ。(論理記号を用いてもよい。) [5 点]
3. $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \{\ell \in \mathbb{N} \mid \ell \leq n\}$ とおく。 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。[5 点]
4. $f: A \rightarrow B$ を写像、 $b \in B, X \subset A, Y \subset B$ とする。次のものの定義を書け(同値なものでもよい)。 $[3$ つ正解で 5 点、一つ間違うごとに -2 点]
 - (1) $f^{-1}(b)$
 - (2) $f(X)$
 - (3) $f^{-1}(Y)$
5. 写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ について、以下の問に答えよ。[5 点 \times 2]
 - (1) f, g ともに単射ならば、合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。
 - (2) 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射であることを示せ。
6. 次のような写像 f を具体的に構成せよ。[5 点 \times 2]
 - (1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ であって、全射ではあるが単射ではないもの。
 - (2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって、単射ではあるが全射ではないもの。
7. 写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。[5 点 \times 4]
 - (1) $X \subset B$ に対して $f(f^{-1}(X)) \subset X$ を示せ。
 - (2) (1) で等号が成り立たないような例を具体的に一つ構成せよ。
 - (3) $Y \subset A, Z \subset A$ とする。 $f(Y - Z) \supset f(Y) - f(Z)$ を示せ。
 - (4) (3) で等号が成り立たないような例を具体的に一つ構成せよ。