

集合論・中間試験 (2009/12/03)

- 次の (1) から (5) の説明として最も適当なものを (a) から (e) のうちから選べ。(ここでは写像でないものにも写像の記号を用いる。解答は記号のみを答え、説明は不要である。)[3 点 × 5]
 - (1) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(a) = a^2$ (2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(a) = a + 1$
 - (3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(a) = a - 1$ (4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = \frac{1}{a}$
 - (5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = a^3$
 - (a) 写像ではない。
 - (b) 写像であるが、全射でも単射でもない。
 - (c) 全射であるが単射ではない。
 - (d) 単射であるが全射ではない。
 - (e) 全単射である。
- 命題「任意の自然数 n に対して、ある実数 x が存在して $n < x$ となる」の否定を通常の文章として記述せよ。[5 点]
- 命題「 $A \implies B$ 」に対して、その対偶「 $\neg B \implies \neg A$ 」が必要十分条件となることを真理表を用いて説明せよ。[5 点]
- A, B, C を集合とする。 $A \cup C = B \cup C$ かつ $A \cap C = B \cap C$ であるとき、 $A = B$ となることを証明せよ。[5 点]
- $\{A_1, A_2, \dots\}$ を集合の族とする。このとき $\bigcap_{i=1}^{\infty}$ の定義を (なるべく正確に) 書け [5 点]
- 写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ について、以下の問に答えよ。[5 点 × 2]
 - (1) f, g とともに単射ならば、合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。
 - (2) 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射であることを示せ。
- 写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。 $b \in B$ に対して $f^{-1}(b)$ の定義を書け。[5 点]
- 写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。 $X \subset A$ に対して $f^{-1}(f(X)) = X$ は正しいかどうかを答え、正しいと答えたならばそれを証明し、正しくないと答えたならば反例を具体的に一つ構成せよ。[5 点]
- 写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。 $X \subset A, Y \subset A$ とする。 $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$ は正しいかどうかを答え、正しいと答えたならばそれを証明し、正しくないと答えたならば反例を具体的に一つ構成せよ。[5 点]

(60 点満点)