# 集合論・期末試験 (2010/01/28)

1. 集合 $A$, $B$, $C$ に対して $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成り立つことを示せ。[5 点]

2. 写像 $f : A \to B$, $g : B \to A$ に対して $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$ が成り立つとする。このとき $f$ は全単射であることを示せ。ただし $id_A$ は $A$ の恒等写像とする。[5 点]

3. 任意の写像 $f : A \to B$ に対して、ある集合 $C$ とある全射 $g : A \to C$ とある単射 $h : C \to B$ が存在して $f = h \circ g$ となることを示せ。[5 点]

4. $\triangle$ を集合 $A$ 上の関係とする。[5 点 × 2]

   (1) $\triangle$ が順序関係であることを定義を書け。

   (2) $\triangle$ が同値関係であることを定義を書け。

5. 以下のような例を具体的に一つずつ書け。ただし集合とその順序をきちんと答えること。[5 点 × 2]

   (1) 全順序集合ではない順序集合。

   (2) 整列集合ではない全順序集合。

6. $\leq$ を集合 $A$ の順序とする。$A$ の最大元は極大元であることを示せ。[5 点]

7. $A$ は 実数を成分とする $n$ 次正方行列全体の集合とする。$A$ 上の関係 $\sim$ を、$M, N \in A$ に対して、ある $n$ 次正則行列 $P, Q$ が存在して $N = PMQ$ となることで定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]

8. 自然数 $n$ を一つ固定する。$n$ を法とする整数の合同を考える。[5 点 × 2]

   (1) $a \in \mathbb{Z}$ を含む剰余類 $C_a$ を $\mathbb{Z}$ の部分集合としてなるべく正確に書け。

   (2) $C_a, C_b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して、乗法 $C_a C_b = C_{ab}$ が矛盾なく定義される (well-defined である) ことを示せ。

9. $A$, $B$, $C$ を集合とする。[5 点 × 2]

   (1) 集合の濃度について $|A| \leq |B|$ であることの定義を書け。

   (2) $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |C|$ であるならば $|A| \leq |C|$ であることを示せ。

(65 点満点)