

集合論・筆答レポート問題 (第一回 2011/11/28)

1. A, B を命題とする。命題 $A \Rightarrow B$ と同値な命題を \wedge (and), \vee (or), \neg (not) のみを用いて書け。[5 点]
2. ベクトル v_1, \dots, v_n が一次独立であるとは、「 $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}$ ならば $a_1 = \dots = a_n = 0$ である」が成り立つことである。 v_1, \dots, v_n が一次独立でないことをなるべく理解しやすい言葉で書け。[5 点]
3. A, B, C を集合とする。
 - (1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ であることを証明せよ。[5 点]
 - (2) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$ であることを証明せよ。[5 点]
4. A, B, C を集合とし、写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ を考える。
 - (1) f, g が共に単射であるならば、合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。[5 点]
 - (2) 合成写像 $g \circ f$ が全射であるならば、 g は全射であることを示せ。[5 点]
5. A, B を集合とし $f: A \rightarrow B$ を写像とする。
 - (1) $b \in B$ に対して $f^{-1}(b)$ の定義を書け。また $X \subset B$ に対して $f^{-1}(X)$ の定義を書け。[5 点]
 - (2) $X \subset B$ に対して $\bigcup_{x \in X} f^{-1}(x) = f^{-1}(X)$ を示せ。[5 点]
6. A, B を集合とし $X \subset A, Y \subset A$ とする。また $f: A \rightarrow B$ を写像とする。 $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ が成り立つかどうかを判定し、成り立つならば証明を与え、成り立たないならば反例を一つあげよ。[5 点]
7. 次のような写像の例を具体的に答えよ。(理由などを答える必要はない。)
 - (1) \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像で、全射であるが単射ではないもの。[3 点]
 - (2) \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像で、単射であるが全射ではないもの。[3 点]
 - (3) \mathbb{R} から $\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ への全単射。[3 点]
 - (4) \mathbb{Z} から \mathbb{N} への全単射。[3 点]
 - (5) 集合 X から X への写像で、全射でも単射でもないもの。(集合 X が何であるかもきちんと答えること。)[3 点]

[60 点満点]