集合論・筆答レポート問題 (第二回 2012/01/30)

1. ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとは、「$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である」が成り立つことである。$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立でないことをなるべく理解しやすい言葉で書け。[5 点]

2. 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ を考える。合成写像 $g \circ f : A \to C$ が単射であるならば f は単射であることを示せ。[5 点]

3. 写像 $f : A \to B$ は全射であるとする。$X \subset B$ に対して $f(f^{-1}(X)) = X$ を証明せよ。[5 点]

4. $f : A \to B$ を全射とする。写像 $g : B \to C$ と $h : B \to C$ について $g \circ f = h \circ f$ であるとする。このとき $g = h$ であることを示せ。[5 点]

5. $\lhd$ を集合 A 上の関係とする。$\lhd$ が順序関係であることの定義を書け。 [5 点]

6. (1) 順序集合 $(X, \leq)$ の最大元と極大元の定義を書け。[5 点]
   (2) 順序集合 $(X, \leq)$ の最大元は極大元であることを示せ。[5 点]

7. $X = \{1, 2, 3\}$ とする。
   (1) 2^X を要素をすべて書くことによって具体的に書け。[5 点]
   (2) 2^X を自然な順序によって順序集合と見るとき、これは全順序集合であるかどうかを判定し、その理由も述べよ。[5 点]

8. $M_n(\mathbb{C})$ で複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合を、$GL_n(\mathbb{C})$ で複素数を成分とする n 次正則行列全体の集合を表すことにする。$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、$B = AP$ となる $P \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在するときに $A \sim B$ として、$M_n(\mathbb{C})$ 上の関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを証明せよ。[5 点]

9. 自然数 n を固定する。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して $a - b = nc$ となる $c \in \mathbb{Z}$ が存在するとき $a \sim_n b$ として、整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ に関係 $\sim_n$ を定める。
   (1) $\sim_n$ が同値関係であることを証明せよ。[5 点]
   (2) $n = 7$ として $\sim_7$ による類別による同値類の完全代表系を書け。[5 点]
   (3) $\sim_n$ による $a \in \mathbb{Z}$ を含む同値類を $[a]_n$ と書くことにする。$f : \mathbb{Z}/\sim_6 \to \mathbb{Z}/\sim_3$ を $f([a]_6) = [a]_3$ で矛盾なく定義できることを示せ。[5 点]

10. 集合の濃度について $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}_{>0}|$ を証明せよ。ただし $\mathbb{R}$ は実数全体の集合、$\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ である。[5 点]

[70 点満点]

集合論・筆答レポート問題 (第一回 2011/11/28) 解答例

1. $(\neg A) \vee B$

   定義である。

2. ある $i \in \{1, \cdots, n\}$ について $a_i \neq 0$ である $a_1, \cdots, a_n$ が存在して $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ となる。

   命題は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に関するもので、$a_1, \cdots, a_n$ は命題の中だけで用いられている。$a_1, \cdots, a_n$ の役割をはっきりと意識しなくてはならない。一次独立であることは

   $$\forall(a_1, \cdots, a_n)((a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}) \Rightarrow ((a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_n = 0)))$$

   と表される。よってこの否定は

   $$\exists(a_1, \cdots, a_n)((a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}) \wedge ((a_1 \neq 0) \vee \cdots \vee (a_n \neq 0)))$$

   となり、平易な文章で表せば、上記のようになる。

3. 省略。

4. 省略。

5. (1) $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$, $f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}$

   (2)
   - $a \in \bigcup_{x \in X} f^{-1}(x)$ とする。ある $x_0 \in X$ があって $a \in f^{-1}(x_0)$ となる。このとき $f(a) = x_0 \in X$ なので $a \in f^{-1}(X)$ である。よって $\bigcup_{x \in X} f^{-1}(x) \subset f^{-1}(X)$ である。
   - $a \in f^{-1}(X)$ とする。$f(a) \in X$ である。このとき $a \in f^{-1}(f(a))$ で $f(a) \in X$ なので $a \in \bigcup_{x \in X} f^{-1}(x)$ となる。よって $\bigcup_{x \in X} f^{-1}(x) \supset f^{-1}(X)$ である。

   以上をあわせて $\bigcup_{x \in X} f^{-1}(x) = f^{-1}(X)$ である。

6. 成り立たない。
   反例. $A = \{1, 2\}$, $B = \{0\}$ とし $f : A \to B$ を $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ で定める。$X = \{1\} \subset A$, $Y = \{2\} \subset A$ とすると $X \cap Y = \emptyset$ であるから $f(X \cap Y) = \emptyset$ である。また $f(X) = \{0\}$, $f(Y) = \{0\}$ なので $f(X) \cap f(Y) = \{0\}$ である。したがってこのとき $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$ である。

7. (1) $f(x) = x^3 - x$

   (2) $f(x) = x + 1$

   (3) $f(x) = e^x$

   (4) $x \geq 0$ のとき $f(x) = 2x + 1$ で、$x < 0$ のとき $f(x) = -2x$ で定めたもの

   (5) $X = \{1, 2\}$ とし $f : X \to X$ を $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ で定めたもの