

集合論・筆答レポート問題 (第一回 2013/11/27)

1. 命題 A, B, C に対して $(A \wedge B) \vee C$ と $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ が同値な命題となることを真理表を用いて説明せよ。[5 点]
2. $P(x, y)$ を x, y に関する命題であるとする。「任意の x に対して $P(x, y)$ が真、となるような y がある」という命題を、論理記号 ($\forall, \exists, \vee, \wedge$ など) を用いて書け。ただし、意味が明確になるように気をつけて書くこと。[5 点]
3. 自然数 n に対して $S_n = \{a \in \mathbb{N} \mid a \geq n\}$ とおく。ただし \mathbb{N} は自然数全体の集合である。

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$ (空集合) であることを示せ。[5 点]

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{N}$ であることを示せ。[5 点]

4. 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ について、合成写像 $g \circ f$ が単射であるならば、 f は単射であることを示せ。[5 点]
5. $f: X \rightarrow Y$ を単射とし $A \subset X$ とする。このとき $f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。[5 点]
6. $f: X \rightarrow Y$ を全射とし $B \subset Y$ とする。このとき $f(f^{-1}(B)) = B$ であることを示せ。[5 点]
7. 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める。ただし \mathbb{R} は実数全体の集合である。このとき次のものを記述せよ。ただし、开区間、閉区間などに $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ などの記号を用いる。[2 点 \times 5]

(1) $f((-1, 2))$

(2) $f^{-1}(1)$

(3) $f^{-1}(-1)$

(4) $f^{-1}((-1, 2))$

(5) $f^{-1}(f([-1, 2]))$

8. A, B を集合とし $|A| = 4, |B| = 3$ とする。以下の間に答えよ。ただし、説明は不要で解答のみでよい。
 - (1) A から B への写像はいくつあるかを答えよ。[4 点]
 - (2) A から B への全射はいくつあるかを答えよ。[3 点]
 - (3) B から A への単射はいくつあるかを答えよ。[3 点]
9. 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ について、合成写像 $g \circ f$ が全射であっても、 f は全射とは限らない。 $g \circ f$ が全射で f が全射でないような例を具体的に構成せよ。(X, Y, Z, f, g を全て明確に記すこと。) [5 点]

[60 点満点]