

集合論・筆答レポート問題 (第二回 2014/01/22)

1. 「任意の x に対して、ある y が存在して $P(x, y)$ は真である」という命題を考える。ただし $P(x, y)$ は x, y に関する命題であるとする。この命題の否定を書け。意味が不明確にならないように注意して答えること。[5 点]
2. 写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ について、 f, g がともに単射であるならば、合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。[5 点]
3. 写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。 $X \subset A, Y \subset A$ とする。 $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ は正しいかどうか答え、正しいならば証明を与え、正しくないならば、成り立たないような例を具体的に一つ与えよ。[5 点]
4. 写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。 $S \subset B, T \subset B$ とする。 $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$ は正しいかどうか答え、正しいならば証明を与え、正しくないならば、成り立たないような例を具体的に一つ与えよ。[5 点]
5. A を集合、 \leq を A の順序とする。
 - (1) A に最大元 a が存在するならば、それは極大元であることを示せ。[5 点]
 - (2) A に最大元 a が存在するとき、 a は A の唯一つの極大元であることを示せ。[5 点]
6. 集合 A の順序 \leq が整列順序であることの定義を書け。[5 点]
7. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ とする。 $a, b \in A$ に対して、 a が b を割り切るときに $a \mid b$ として、関係 \mid を定める。
 - (1) 関係 \mid は順序であることを示せ。[5 点]
 - (2) A の最大元、最小元、極大元、極小元を全て求めよ。[5 点]
 - (3) この順序が全順序であるかどうかを判定せよ。ただし、その理由も書くこと。[5 点]
8. 集合 A の同値関係 \sim を考える。 $a \in A$ を含む同値類を C_a と表す。 $a, b \in A$ に対して $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ (空集合) であるならば、 $C_a = C_b$ であることを示せ。[5 点]
9. 整数全体の集合 \mathbb{Z} を考える。自然数 n を一つ固定する。 $a, b \in \mathbb{N}$ に対して、ある整数 ℓ が存在して $a - b = n\ell$ となるときに $a \sim b$ として、 \mathbb{Z} の関係 \sim を定める。
 - (1) \sim は同値関係であることを示せ。[5 点]
 - (2) a を含む同値類を $[a]$ と表すことにする。写像 $f: (\mathbb{Z}/\sim) \times (\mathbb{Z}/\sim) \rightarrow (\mathbb{Z}/\sim)$, $f([a], [b]) = [a + b]$ が矛盾なく定義されることを示せ。[5 点]
10. 集合の濃度について $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ を証明せよ。ただし \mathbb{N} は自然数全体の集合である。[5 点]

[70 点満点]