

## 集合論・筆答レポート (第一回 2020/11/18)

1. 「任意の実数  $r$  に対して、ある自然数  $n$  が存在して  $r < n$  である」という命題の否定を、意味が不明確にならないように注意して、通常の方法で表わせ。[5 点]
2. 命題  $A, B$  に対して、命題「 $A \implies B$ 」の否定を論理記号を用いて表わせ。[5 点]
3.  $A, B, C$  を集合とする。 $A \cap B = A \cap C$  かつ  $A \cup B = A \cup C$  であるならば、 $B = C$  であることを示せ。[5 点]
4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  で定める。実数  $a, b$  に対して  $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$  は閉区間を表すものとする。(解答には閉区間や开区間などの記号を自由に用いてよい。説明不要。解答のみでもよい。)[5 点  $\times$  2]
  - (1)  $f([-1, 2])$  を求めよ。
  - (2)  $f^{-1}([-15, 0])$  を求めよ。
5. 写像  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  に対して以下の命題を証明せよ。[5 点  $\times$  4]
  - (1)  $f$  と  $g$  がともに全射であるならば、合成写像  $g \circ f$  も全射であることを示せ。
  - (2) 合成写像  $g \circ f$  が全射であるならば、 $g$  も全射であることを示せ。
  - (3)  $f$  と  $g$  がともに単射であるならば、合成写像  $g \circ f$  も単射であることを示せ。
  - (4) 合成写像  $g \circ f$  が単射であるならば、 $f$  も単射であることを示せ。
6.  $f: A \rightarrow B$  を写像とし  $X \subset B$  とする。[5 点  $\times$  2]
  - (1)  $f(f^{-1}(X)) \subset X$  であることを示せ。
  - (2)  $f(f^{-1}(X)) = X$  が成り立たないような例を具体的に書け。
7. 全射であって単射でない写像の例を具体的に書け。(写像が明確になるように注意すること。)[5 点]

[5 点  $\times$  12 = 60 点満点]