集合論・筆答レポート (第一回 2020/11/18) 解答例

1. 「ある実数 r が存在して、任意の自然数 n に対して $r \geq n$ となる。」

2. A $\wedge$ ($\neg$B)

3. $A \cap B = A \cap C$ かつ $A \cup B = A \cup C$ と仮定する。

   $b \in B$ とする。$b \in B \subset A \cup B = A \cup C$ となるから、$b \in A$ または $b \in C$ である。$b \in A$ と仮定する。このとき $b \in A \cap B = A \cap C \subset C$ となる。よっていずれの場合も $b \in C$ となる。以上より $B \subset C$ である。

   条件は B, C について対称なので、同様にして $B \supset C$ も成り立つ。したがって $B = C$ である。

4. (1) $[-3, 16\sqrt{3}/9]$
   (2) $[-2, -1] \cup [1, 3]$

5. (1) f と g が共に全射であると仮定する。
   $c \in C$ とする。g が全射であるから、$c \in C$ に対して、ある $b \in B$ が存在して $g(b) = c$ となる。f が全射であるから、$b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$ となる。よって $c = g(f(a)) = (g \circ f)(a) \in (g \circ f)(A)$ となる。
   以上より $C \subset (g \circ f)(A)$ となり $g \circ f$ は全射である。

   (2) $g \circ f$ が全射であると仮定する。
   $c \in C$ とする。$g \circ f$ が全射であるから、$c \in C$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $(g \circ f)(a) = c$ となる。このとき $g(f(a)) = c$ であって $f(a) \in B$ なので、$c = g(f(a)) \in g(B)$ となる。
   以上より $C \subset b(B)$ となり g は全射である。

   (3) f と g が共に単射であると仮定する。
   $a, a' \in A$ に対して $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ と仮定する。$g(f(a)) = (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') = g(f(a'))$ である。g が単射であるから $f(a) = f(a')$ となる。f が単射であるから $a = a'$ となる。
   以上より $g \circ f$ は単射である。

   (4) $g \circ f$ が単射であると仮定する。
   $a, a' \in A$ に対して $f(a) = f(a')$ と仮定する。$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$ となる。$g \circ f$ が単射であるから $a = a'$ である。
   以上より f は単射である。

6. (1) $b \in f(f^{-1}(X))$ とする。ある $a \in f^{-1}(X)$ があって $f(a) = b$ である。$a \in f^{-1}(X)$ より $f(a) \in X$ である。したがって $b = f(a) \in X$ である。
   以上より $f(f^{-1}(X)) \subset X$ となる。

   (2) 解答例 (全射でない写像 $f : A \to B$ を作り、$X \not\subset f(A)$ となるように X をとればよい。)
   - $A = \{1\}$, $B = \{x, y\}$ とし、$f : A \to B$ を $f(1) = x$ で定める。$X = B$ とすれば $f(f^{-1}(X)) = f(\{1\}) = \{x\} \neq X$ である。

7. 解答例

   - $A = \{1, 2\}$, $B = \{x\}$ とし、$f : A \to B$ を $f(1) = f(2) = x$ で定める。
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3 - 1$ で定める。
   - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(1) = 1$, $n \geq 2$ のとき $f(n) = n - 1$ で定める。