集合論・筆答レポート (第二回 2021/01/20)
解答例

1. (1) $a, a' \in A$ とし $f(a) = f(a')$ とする。$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$ である。$g \circ f$ は単射だから $a = a'$ となる。よって f は単射である。

   (2) [例] $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a\}$ とする。$f : A \to B$ を $f(a) = a$ で定める。また $g : B \to C$ を $g(a) = a$, $g(b) = a$ で定める。このとき $g \circ f$ は全単射で g は単射ではない。

2. (1)
   - $a \in \mathbb{N}$ に対して $a = 1 \cdot a$ で $1 \in \mathbb{N}$ だから $a \mid a$ である。
   - $a \mid b$, $b \mid a$ とする。$b = \ell a$, $a = mb$ となる $\ell, m \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき $a = \ell m a$ となるが、$\ell, m, a \in \mathbb{N}$ なので、これは $\ell = m = 1$ のときのみ可能である。したがって $a = b$ である。
   - $a \mid b$, $b \mid c$ とする。$b = \ell a$, $c = mb$ となる $\ell, m \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき $c = \ell m a$ であり $\ell m \in \mathbb{N}$ であるから $a \mid c$ である。

   以上より "$|$" は順序である。

   (2)
   - 最大元 : なし
   - 最小元 : 1
   - 極大元 : $7, 8, 9, 10, 11, 12$
   - 極小元 : 1

3. 任意の空でない部分集合が最小元をもつような順序集合

4. [例] 整数すべての集合 $\mathbb{Z}$ に普通の大小関係で順序を入れたもの

5. $C_a = \{x \in A \mid a \sim x\}$ である。

   $x \in C_a$ とする。同値類の定義から $a \sim x$ である。また、仮定より $a \sim b$ であり、対称律から $b \sim a$ である。よって推移律から $b \sim x$ となり $x \in C_b$ である。したがって $C_a \subset C_b$ である。

   $y \in C_b$ とする。$b \sim y$ である。仮定から $a \sim b$ なので、推移律から $a \sim y$ となる。よって $y \in C_a$ である。したがって $C_a \supset C_b$ である。

   以上より $C_a = C_b$ である。

6. (1)
   - $a \in \mathbb{Z}$ に対して $a - a = 0 = 0 \cdot n$ で $0 \in \mathbb{Z}$ であるから $a \sim a$ である。

- $a \sim b$ とする。 $a-b=\ell n$ となる $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在する。$b-a=(-\ell)n$ で $-\ell \in \mathbb{Z}$ だから $b \sim a$ である。
- $a \sim b, b \sim c$ とする。$a-b=\ell n, b-c=mn$ となる $\ell, m \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき $a-c=(a-b)+(b-c)=\ell n+mn=(\ell+m)n$ で $\ell+m \in \mathbb{Z}$ であるから $a \sim c$ である。

以上より $\sim$ は同値関係である。

(2) [例] $0, 1, \ldots, n-1$

(3) $a+n\mathbb{Z}=a'+n\mathbb{Z}, b+n\mathbb{Z}=b'+n\mathbb{Z}$ とする。$a-a'=\ell n, b-b'=mn$ となる $\ell, m \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき $ab-a'b'=(b'\ell+a'm+\ell mn)n$ で $b'\ell+a'm+\ell mn \in \mathbb{Z}$ であるから $ab \sim a'b'$、したがって $ab+n\mathbb{Z}=a'b'+n\mathbb{Z}$ である。

7. [例] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を以下で定めれば、これは全単射である。

$$f(n)=\begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ が偶数のとき} \\ \frac{-n+1}{2}, & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

8. $f : A \to B$ を全射と仮定する。各 $b \in B$ について、$f^{-1}(b)$ は空ではないから、一つの元 $a_b \in A$ をとることができる (ここで選択公理が使われている)。$g : B \to A$ を $g(b)=a_b$ で定める。

   g が単射であることを示す。$b, b' \in B$ に対して $g(b)=g(b')$ と仮定する。このとき $a_b \in f^{-1}(b)$ だったから $f(a_b)=b$ であり

$$b=f(a_b)=f(g(b))=f(g(b'))=f(a_{b'})=b'$$

   となる。よって g は単射である。