Perron-Frobenius の定理

群論と対称性 2019 年度 – 花木 章秀

Abstract

Perron-Frobenius の定理を理解し、その証明を与えることがこのノートの目的である。証明は Wielandt [1] によるものを Zhan [2] を参考に与える。

1 Perron-Frobenius の定理

確率論における**マルコフ連鎖** (Markov chain) とは、有限個の状態をもち、(離散的な) 単位時間に一定の確率で次の状態にうつる確率過程である[1]。$X_1, \dots, X_n$ を状態とし、状態 X_j から状態 X_i へうつる 確率が p_{ij} であるとする。行列 $A = (p_{ij})$ を考える。状態 X_i のものが v_i 個あるとし、ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ とおく。このとき 1 単位時間後の状態は $A\boldsymbol{v}$ であることが分かる。同様に k 単位時間後の状態は $A^k\boldsymbol{v}$ である。マルコフ連鎖における定常状態は A の固有値 1 に対する固有ベクトルであることが分かる。この様子を記述するために Perron–Frobenius の定理が用いられる。

以下このノートでは O で零行列を表す。行列のサイズを明示したいときには $O_{m,n}$, O_n などとも書く。零ベクトルは $\mathbf{0}$ または $\mathbf{0}_n$ で表す。単位行列は I または I_n と表す。行列 A の (i,j)-成分は A_{ij} のように表す。ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しては $\boldsymbol{v}_i$ でその第 i-成分を表す。また ${}^tA$ は A の転置行列である。$\mathbb{R}$ は実数体を表し $\mathbb{R}_+$ で非負実数全体の集合を表す。(0 を含むので注意すること。)

定義 1.1 (非負行列、正行列)**.** 実数を成分とする型の等しい二つの行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対して、$A \geq B$ ($A > B$) を任意の i, j に対して $a_{ij} \geq b_{ij}$ ($a_{ij} > b_{ij}$) であることで定める。$\geq$ は半順序となる。

$A \geq O$ ($A > O$) のとき、A を**非負行列** (nonnegative matrix) (**正行列** (positive matrix)) という。

ベクトルについても同様に、半順序、**非負ベクトル**、**正ベクトル**を定める。

マルコフ連鎖を表す行列は成分が確率なので非負行列である。

次に行列の定める有向グラフ (directed graph, digraph) を定義する。

定義 1.2 (行列の定めるグラフ、既約行列)**.** $A = (a_{ij})$ を実数を成分とする $n \times n$ 行列とする。頂点集合を $V = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、矢集合を $E = \{(i,j) \mid a_{ji} \neq 0\}$ として定まる有向グラフを A **の定めるグラフ**という。E の要素を**矢** (arrow) という。頂点 i から i への矢も考える。矢を向きに沿っていくつかつないだものを**道** (path) という。頂

[1] 加算無限個の状態をもつものや連続時間のものもあるが、ここでは考えない。

点 i から i へは常に長さ 0 の道があるものと考える。任意の 2 頂点の間に道が存在するとき、そのグラフは**強連結** (strongly connected) であるという。

行列 A の定めるグラフが強連結であるとき A を**既約行列** (irreducible matrix) という。既約でない行列は**可約行列** (reducible matrix) といわれる。

定義から、既約行列の行と列には $\mathbf{0}$ がないことがすぐに分かる。

行列 $A = (a_{ij})$ の既約性について考える。自然数 k に対して

$$(A^k)_{ij} = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\ldots a_{i_{k-1}j}$$

である。和はすべての $i_1,\ldots,i_{k-1}$ を動くが、i_ℓ から $i_{\ell-1}$ への矢がなければ、すなわち $a_{i_{\ell-1}i_\ell} = 0$ ならばその項は考えなくてもよい。したがって和は j から i への長さ k の道全体を動くと考えることができる。ここで道は同じ頂点や矢を繰り返し通ってもよいことに注意しておく。

A が非負行列の場合は和に現れるすべての項が非負であるから、j から i への長さ k の道が一つでもあれば $(A^k)_{ij} > 0$ となる。このことから次の命題が成り立つ。

命題 1.3. 非負行列 $A = (a_{ij})$ が既約であることと、任意の (i,j) に対してある $k \geq 1$ が存在して $(A^k)_{ij} > 0$ となることは同値である。

行列の既約性についてもう少し考えよう。

定義 1.4 (行列の置換同値)**.** 二つの正方行列 A, B に対して、ある置換行列 P (各行各列に 1 が一つだけあるような行列) が存在して $B = PAP^{-1}$ となると、A と B は**置換同値** (permutation equivalent) であるという。これは明らかに同値関係を定める。また、置換行列 P に対して $P^{-1} = {}^tP$ であることにも注意しておく。

マルコフ連鎖を表す行列 A に置換同値な行列は、状態 $X_1,\ldots,X_n$ の番号を付け替えて得られるマルコフ連鎖を表す行列となり、本質的には同じものであると考えることができる。

命題 1.5. 非負行列 A について、次は同値である。

(1) A は可約である。

(2) A はブロック三角行列 $\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$ と置換同値である。

(3) A はブロック三角行列 $\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$ と置換同値である。

ただし B, C は正方行列であるとする。

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2), (3). A を可約とする。ある i, j があって i から j への道は存在しない。i からの道が存在する頂点を V_1, i からの道が存在しない頂点を V_2 として、頂点集合を分割する。$i \in V_1$, $j \in V_2$ なので $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ である。$x \in V_1$ の点から $y \in V_2$ への道があれば、道をつないで i から y への道が存在する。これは定義に反するので、

V_1 の頂点から V_2 の頂点への道、特に矢はない。置換同値によって頂点を V_2, V_1 の順に並べ替えれば、その行列は (2) の形になる。V_1, V_2 の順に並べれば、その行列は (3) の形になる。

(2), (3) $\Longrightarrow$ (1). 既約性は置換同値によって保たれるから A を (2) の形としてよい。行列の分割に従って頂点を V_2, V_1 に分割する。このとき V_1 の頂点は V_1 の頂点にしてうつらないから A は可約である。(3) についても同様である。 □

マルコフ連鎖を考えよう。行列が可約であるとき、上の証明中の V_1 からは徐々に V_2 に移動し、決して戻ることはない。したがって定常状態では V_1 に状態をもつものはない。A の定常状態は V_2 上のみで考えればよく、対応する行列は B である。B が既約でなければこれを繰り返し、最終的には既約行列を考えればよいことになる。

Perron-Frobenius の定理を述べる。

定理 1.6 (Perron-Frobenius)**.** A を既約な非負行列とする。$\rho(A)$ を A の固有値の絶対値の最大値とする。

(1) $\rho(A)$ は A の固有値であり、また固有多項式の単根である。($\rho(A)$ を A の *Frobenius* 根という。)

(2) $\rho(A)$ の固有ベクトルとして正のものを取ることができて、非負の固有ベクトルをもつ A の固有値は $\rho(A)$ のみである。

マルコフ連鎖にこの定理を適用すると以下のようなことが分かる。まず ${}^tA$ に定理を適用する。${}^t(1,\ldots,1)$ は ${}^tA$ の固有値 1 に対応する固有ベクトルであり、また正である。したがって $\rho(A)=\rho({}^tA)=1$ が分かる。A の固有値 1 に対応する固有ベクトルとして正のものをとることができて、スカラー倍を除いて一意的である。このベクトルがマルコフ連鎖の定常状態を表し、よってそれは常に存在し一意的であることが分かる。

2 Perron-Frobenius の定理の証明

この節では Perron-Frobenius の定理の証明を与える。

定義 2.1 (サポート)**.** ベクトル $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対してその**サポート** (support) を $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})=\{i\mid y_i\neq 0\}$ と定める。

補題 2.2. A を既約な n 次非負行列とする。$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+$, $\emptyset\neq\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})\subsetneq\{1,\ldots,n\}$ とする。このとき $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})\subsetneq\mathrm{Supp}((I+A)\boldsymbol{y})$ が成り立つ。

Proof. $(I+A)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+A\boldsymbol{y}$ で A も $\boldsymbol{y}$ も非負だから $A\boldsymbol{y}$ も非負で、$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})\subset\mathrm{Supp}((I+A)\boldsymbol{y})$ である。$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})=\mathrm{Supp}((I+A)\boldsymbol{y})$ と仮定する。$\mathrm{Supp}(A\boldsymbol{y})\subset\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})$ である。よって $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})$ に含まれる頂点からの矢は $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})$ にしか出ていない。よって A は可約になり、既約性の仮定に反する。 □

補題 2.3. A を既約な n 次非負行列とする。$\mathbf{0}\neq\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+$ とする。このとき $(I+A)^{n-1}\boldsymbol{y}>\mathbf{0}$ である。

Proof. 補題 2.2 を繰り返し用いればよい。 □

補題 2.4. $n \geq 2$ とし A を n 次非負行列とする。A が既約であることと $(I+A)^{n-1} > O$ であることは同値である。

Proof. A が既約であるとする。$\boldsymbol{e}_j$ を単位ベクトルとし補題 2.3 を用いれば $(I+A)^{n-1}\boldsymbol{e}_j > \boldsymbol{0}$ である。$(I+A)^{n-1}\boldsymbol{e}_j$ は $(I+A)^{n-1}$ の第 j 行だから $(I+A)^{n-1} > O$ である。

$(I+A)^{n-1} > O$ とする。$I+A$ と A は対角成分しか違わないので、その定めるグラフの強連結性は変わらない。命題 1.3 から $I+A$ の定めるグラフは強連結となり、よって A の定めるグラフも強連結、すなわち A は既約である。 □

補題 2.5. A を 既約な n 次非負行列とする。$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ が A の固有ベクトルであるならば $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ である。

Proof. $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする。明らかに $\lambda > 0$ である。$(I+A)\boldsymbol{x} = (1+\lambda)\boldsymbol{x}$ だから

$$\mathrm{Supp}((I+A)\boldsymbol{x}) = \mathrm{Supp}((1+\lambda)\boldsymbol{x}) = \mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$$

となり、補題 2.2 より $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ である。 □

定義 2.6 (Collatz-Wielandt 関数)**.** 非負行列 A に対して *Collatz-Wielandt* **関数** $f_A : \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ を次のように定める：

$$f_A(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}_i > 0} \frac{(A\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i}$$

補題 2.7. n 次非負行列 A に対して次が成り立つ。

(1) $t > 0$ に対して $f_A(t\boldsymbol{x}) = f_A(\boldsymbol{x})$ である。

(2) $f_A(\boldsymbol{x}) = \max\{\rho \in \mathbb{R} \mid A\boldsymbol{x} \geq \rho\boldsymbol{x}\}$ である。

(3) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $f_A((I+A)^{n-1}\boldsymbol{x}) \geq f_A(\boldsymbol{x})$ である。

(4) f_A は有界である。

Proof. (1) は明らかである。

(2). $\tau = \max\{\rho \in \mathbb{R} \mid A\boldsymbol{x} \geq \rho\boldsymbol{x}\}$ とおく。$A\boldsymbol{x} \geq \tau\boldsymbol{x}$ だから、$\boldsymbol{x}_i \neq 0$ なる i に対して $(A\boldsymbol{x})_i/\boldsymbol{x}_i \geq \tau$ である。よって $f_A(\boldsymbol{x}) \geq \tau$ である。また $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して、$\boldsymbol{x}_i \neq 0$ ならば $(A\boldsymbol{x})_i \geq f_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$ であり、また $\boldsymbol{x}_i = 0$ でも同じ式は成り立つので $f_A(\boldsymbol{x}) \leq \tau$ である。

(3). $A\boldsymbol{x} \geq f_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ の両辺に $(I+A)^{n-1}$ をかけて

$$A(I+A)^{n-1}\boldsymbol{x} \geq f_A(\boldsymbol{x})(I+A)^{n-1}\boldsymbol{x}$$

である。$(I+A)^{n-1}\boldsymbol{x}$ に (2) を適用すれば $f_A((I+A)^{n-1}\boldsymbol{x}) \geq f_A(\boldsymbol{x})$ となる。

(4). $f_A(\boldsymbol{x}) \geq 0$ は明らかである。$\boldsymbol{x}_\ell$ を最大の成分とすると

$$f_A(\boldsymbol{x}) \leq \frac{(A\boldsymbol{x})_\ell}{\boldsymbol{x}_\ell} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{\ell j}\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{x}_\ell} \leq \frac{\left(\sum_{j=1}^n A_{\ell j}\right)\boldsymbol{x}_\ell}{\boldsymbol{x}_\ell} = \sum_{j=1}^n A_{\ell j} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

であるから、上にも有界である。 □

$\Omega_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i = 1\}$ とおく。補題 2.7 (1) から f_A を調べるには Ω_n に制限しても十分であることが分かる。f_A が最大値をもつことを示すために、よく知られた Weiestrass の定理を (証明無しで) 用いたい。Ω_n はコンパクトで f_A はその内部では連続であるが、境界で連続ではない。

定理 2.8 (Weierstrass)**.** コンパクト集合で定義された実数値連続関数は最大値 (最小値) をもつ。

補題 2.9. A は既約な n 次非負行列であるとする。このとき f_A は $\mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ で最大値をもつ。

Proof. $\Gamma = (I+A)^{n-1}\Omega_n$ とおく。補題 2.3 から Γ のすべての元は正である。明らかに Γ はコンパクトで f_A は Γ 上で連続である。Weierstrass の定理から f_A は Γ の点 $\boldsymbol{y}$ で最大値をとる。

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする。補題 2.7 から

$$f_A(\boldsymbol{x}) = f_A\left(\boldsymbol{x}/\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i\right) \le f_A\left((I+A)^{n-1}\boldsymbol{x}/\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i\right) \le f_A(\boldsymbol{y})$$

となるから $f_A(\boldsymbol{y})$ は $\mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ でも最大値となる。 □

行列式に関する命題をもう一つ用意する。

命題 2.10 (行列式の微分)**.** 変数 x の関数を成分とする n 次正方行列を $F = (f_{ij}(x))$ とする。このとき

$$\frac{d}{dx}\det(F) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \frac{d}{dx} f_{ij}(x)$$

である。ただし Δ_{ij} は F の (i,j)-余因子、すなわち F から第 i 行と第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたもの、である。

Proof. 微分公式より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\det(F) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{11^\sigma} f_{22^\sigma} \dots f_{nn^\sigma}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f'_{11^\sigma} f_{22^\sigma} \dots f_{nn^\sigma} + \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{11^\sigma} f'_{22^\sigma} \dots f_{nn^\sigma} \\
&\quad + \dots + \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{11^\sigma} f_{22^\sigma} \dots f'_{nn^\sigma} \\
&= \begin{vmatrix} f'_{11} & \dots & f'_{1n} \\ f_{21} & \dots & f_{2n} \\ & \dots & \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ f'_{21} & \dots & f'_{2n} \\ & \dots & \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & \dots & f_{2n} \\ & \dots & \\ f'_{n1} & \dots & f'_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

である。最後の式の初めの項を第 1 行で展開し、次の項を第 2 で展開し、とすれば、補題の式を得る。 □

定義 2.11 (スペクトル半径)**.** 正方行列 A に対して、固有値の絶対値の最大値を A の**スペクトル半径** (spectral radius) という。

定理 2.12 (Perron-Frobenius)**.** $n \geq 2$ とし、$A = (a_{ij})$ を既約な n 次非負行列とする。

(1) スペクトル半径 $\rho(A)$ は A の固有値であり、また固有多項式の単根である。(このとき $\rho(A)$ を A の *Frobenius* 根という。)

(2) $\rho(A)$ の固有ベクトルとして正のものを取ることができて、非負の固有ベクトルをもつ A の固有値は $\rho(A)$ のみである。

Proof. 補題 2.9 より f_A は $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ で最大値 $r = f_A(\boldsymbol{y})$ をとるものとする。r が A の固有値で $\boldsymbol{y}$ が対応する固有ベクトルであることを示す。

まず $\boldsymbol{u} = {}^t(1, \ldots, 1)$ を考えると

$$r \geq f_A(\boldsymbol{u}) = \min_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$$

である。

補題 2.7 (2) より

$$A\boldsymbol{y} - r\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

である。$A\boldsymbol{y} - r\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する。補題 2.3 より

$$(I + A)^{n-1}(A\boldsymbol{y} - r\boldsymbol{y}) > \boldsymbol{0}$$

であるから $\boldsymbol{x} = (I + A)^{n-1}\boldsymbol{y}$ とおくと

$$A\boldsymbol{x} - r\boldsymbol{x} > 0$$

である。$\boldsymbol{x}$ の成分の最大値を α、$A\boldsymbol{x} - r\boldsymbol{x}$ の成分の最小値を β とするとき $\varepsilon = \beta/2\alpha > 0$ とおけば

$$A\boldsymbol{x} - (r + \varepsilon)\boldsymbol{x} \geq 0$$

となる。補題 2.7 (2) より

$$r = f_A(\boldsymbol{y}) \geq f_A(\boldsymbol{x}) \geq r + \varepsilon > r$$

となって矛盾である。よって $A\boldsymbol{y} - r\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$、すなわち r は A の固有値で $\boldsymbol{y}$ が対応する固有ベクトルである。また $\boldsymbol{y}$ は非負であるが、補題 2.5 より正であることが分かる。

λ を A の固有値とし $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を対応する固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。$|\boldsymbol{x}| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ とおく。

$$|\lambda| \cdot |x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| = (A|\boldsymbol{x}|)_i$$

であるから $|\lambda| \cdot |\boldsymbol{x}| \leq A|\boldsymbol{x}|$ である。補題 2.3 (2) より

$$r \geq f_A(|\boldsymbol{x}|) \geq |\lambda|$$

となる。よって $r=\rho(A)$ である。

r の固有空間の次元が 1 であることを示す。$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ を r に対する固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{x}$ より $A|\boldsymbol{x}|\geq r|\boldsymbol{x}|$ である。前の議論と同じように $A|\boldsymbol{x}|=r|\boldsymbol{x}|$ かつ $|\boldsymbol{x}|>\mathbf{0}$ となる。よって r に対応する任意の固有ベクトルは 0 を成分にもたない。固有空間が 1 次元でないとし、$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ のスカラー倍でない固有ベクトルとすれば $\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}$ は $\mathbf{0}$ でない固有ベクトルで、その第 1 成分は 0 である。これは矛盾なので、固有空間の次元は 1 である。

r が A の固有多項式の単根であることを示す。λ を変数とし $g(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ とおく。r が $g(\lambda)$ の重根であるための必要十分条件は $g(r)=g'(r)=0$ となることであるから、$g'(r)\neq 0$ を示せばよい。命題 2.10 より

$$g'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\det(\lambda I-A)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ii}=\mathrm{tr}(B(\lambda))$$

である。ただし、ここで $B(\lambda)=\mathrm{adj}(\lambda I-A)$ は $\lambda I-A$ の余因子行列である。

$$B(r)(rI-A)=(rI-A)B(r)=g(r)I=O$$

r に対する固有空間の次元が 1 なので $\mathrm{rank}(rI-A)=n-1$ で、よって $\mathrm{rank}(B(r))\leq 1$ である。また $rI-A$ には正則な $(n-1)$ 次小行列があるから $B(r)\neq O$ である。よって $\mathrm{rank}(B(r))=1$ である。$\boldsymbol{b}$ を $B(r)$ の $\mathbf{0}$ でない列ベクトルとする。$(rI-A)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ だから $\boldsymbol{b}$ は r に対する固有ベクトルで、それは $\boldsymbol{y}$ のスカラー倍である。よって $\boldsymbol{b}>\mathbf{0}$ または $\boldsymbol{b}<\mathbf{0}$ である。すなわち $B(r)$ の列は正、負、または $\mathbf{0}$ である。${}^tA$ にこれまでの議論を同様に適用して $B(r)(rI-A)=O$ を考えれば、$B(r)$ の行も正、負、または $\mathbf{0}$ である。したがって $B(r)>O$ または $B(r)<O$ である。いずれの場合も $g'(r)=\mathrm{tr}(B(r))\neq 0$ である。

以上より (1) と (2) の前半部分が示された。$\boldsymbol{x}$ を A の固有値 μ に対するの非負固有ベクトルとする。補題 2.5 より $\boldsymbol{x}$ は正である。$\boldsymbol{z}$ を ${}^tA$ の $r=\rho(A)=\rho({}^tA)$ に対する正の固有ベクトルとする。このとき $\mu{}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{z}A\boldsymbol{x}=r{}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}$ であり ${}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}>0$ であるから $\mu=r$ である。 □

3 グラフ理論への応用

定義 3.1 (単純グラフ)**.** V を有限集合、E を $\binom{V}{2}$ (V の 2 点部分集合全体の集合) の部分集合とする。このとき $\Gamma=(E,V)$ を**単純グラフ** (simple graph) という。V の要素を**頂点** (vertex)、E の要素を**辺** (edge) という。

定義 3.2 (隣接行列)**.** $\Gamma=(V,E)$ を単純グラフとし、$V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ とする。n 次正方行列 $A(\Gamma)=(a_{ij})$ を $\{i,j\}\in E$ のとき $a_{ij}=1$、そうでないとき $a_{ij}=0$ として定め、これを Γ の**隣接行列** (adjacency matrix) という。隣接行列は実対称行列で、その対角成分はすべて 0 である。

定義 3.3 (正則グラフ)**.** $\Gamma=(V,E)$ を単純グラフとする。$v\in V$ に対して $\sharp\{e\in E\mid v\in e\}$ を v の**次数** (degree, valency) という。すべての頂点に対して次数が一定であるとき Γ を**正則グラフ** (regular graph) という。次数が k の正則グラフを k-正則グラフともいう。

定義 3.4 (連結グラフ)**.** $\Gamma = (V, E)$ を単純グラフとする。隣接行列 $A(\Gamma)$ が既約であるとき、Γ を**連結グラフ** (connected graph) という。

命題 3.5. Γ を連結な k-正則グラフとする。$\rho(A(\Gamma)) = k$ であり、また k は隣接行列 $A(\Gamma)$ の重複度 1 固有値である。k に対する固有ベクトルとして、正であるものをとることができ、また非負の固有ベクトルをもつ固有値は k に限る。

Proof. A は既約非負行列である。また $\boldsymbol{j} = {}^t(1, \ldots, 1)$ が A の固有値 k に対する固有ベクトルになることがすぐに分かる。よって k が Frobenius 根で $\boldsymbol{j}$ が対応する固有ベクトルである。Perron-Frobenius の定理を適用すれば命題の主張が成り立つ。 □

References

[1] H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen*, Math. Z. **52** (1950), 642–648. MR 0035265

[2] X. Zhan, *Matrix theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 147, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. MR 3076701