第2回

信州数理物理セミナー

# Ground state in NRQFT

A. Suzuki

Jun. 21, 2010

(相対論的)場の量子論 (QFT)

電子 : Dirac 場 + 光子場 (QED)

(電子・陽電子) (電子場)

NR極限 ↓

(Schrödinger 場)

↓

N体 Schrödinger ~~(粒子)~~ + 光子場 (NRQED)

(電子)

M: 電子の質量 $\to +\infty$ ↓

NRQFT — { 静的な場 (電荷密度) or スピン } + 光子場

→ NR量子力学(QM) + RQFT

◎ 基底状態(G.S)は，最低エネルギーの

"安定な状態"

第2回

信州数理物理セミナー



# Ground state in NRQFT

Jun. 21, 2010

## QMの例1.　（2準位系）

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$　：ヒルベルト空間　（状態空間）

$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$　：ハミルトニアン

$$= \sum_{\lambda = \pm\varepsilon} \lambda P_\lambda, \quad P_{+\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{-\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \pm\varepsilon$ は $H$ の固有値，$P_\lambda$ は固有空間への射影

期待値（エネルギー）

$$\langle \psi, H\psi \rangle = \sum_{\lambda = \pm\varepsilon} \lambda \|P_\lambda \psi\|^2$$

$\|\psi\| = 1$ とすると，

$$\sum_\lambda \|P_\lambda \psi\|^2 = \langle \psi, \underbrace{\left(\sum_\lambda P_\lambda\right)}_{= I} \psi \rangle = \|\psi\|^2 = 1.$$

・各 $\psi \in \mathcal{H}$ $(\|\psi\| = 1)$ に対して，

$$\mu_\psi(\{\lambda\}) := \|P_\lambda \psi\|^2$$

とすると，$(\{\pm\varepsilon\}, \mu_\psi)$ は確率空間となる．

ちなみに，$\alpha \in \mathbb{C}$ は $|\alpha| = 1$ とすると，

$$\|P_\lambda \psi\|^2 = \|P_\lambda(\alpha\psi)\|^2$$

なので，$\psi \sim \alpha\psi$ と同一視して，"状態"とよぶ

• $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ への一般化 (n準位)

$H = H^*$ (自己共役)

$\Rightarrow$ ${}^\exists U$ : ユニタリ行列 s.t.

$$U^*HU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ は $H$ の固有値 (実数)

$\Rightarrow$
$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, \qquad P_i = U \begin{array}{c} \scriptstyle i\text{th} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} U^*$$

ここで、

$E_0(H) := \lambda_1 = \inf_{1 \le i \le n} \lambda_i$ : 基底エネルギー

$\psi_0 \in \mathrm{Ran}\, P_1$ ($\lambda_1$の固有空間の元) : 基底状態

• $\mathcal{H}$ : Hilbert 空間 ($\dim \mathcal{H} = \infty$)

$H$ : linear op. on $\mathcal{H}$

$H = H^*$ (~~[illegible]~~ $H$は自己共役)

$\Rightarrow$
$$H = \int_{\sigma(H)} \lambda \, dP(\lambda)$$

$\forall B \subset \sigma(H)$ : ボレル set
$P(B)$ : proj. on $\mathcal{H}$
$\forall \psi \in \mathcal{H}$
$\|P(B)\psi\|^2$ は確率測度
$P(\sigma(H)) = I$

(スペクトル分解)

$H = H^*$の場合 $\sigma(H)$は$\mathbb{R}$の閉部分集合

$\mathbb{R} \supset \sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid H - \lambda$ は全単射でない$\}$ (スペクトル)

$\cup$

$\sigma_p(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid H$の固有値$\}$

$= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid H - \lambda$ は単射でない$\}$

$\sigma(H)$ : cpt. $\Longleftrightarrow$ Hは有界 $\Rightarrow D(H) = \mathcal{H}$

$\sigma(H)$ : non cpt. $\Longleftrightarrow$ Hは非有界 $\Rightarrow D(H) \subsetneq \mathcal{H}$

注 $H = H^*$ の意味は,

$$\begin{cases} ① & D(H) = D(H^*) \\ ② & H\psi = H^*\psi, \quad \psi \in D(H) \end{cases}$$

もし, ① のかわりに, 次の

①′ $D(H) \subset D(H^*)$

を仮定すると, 対称作用素となる:

$$H \subset H^* \Longleftrightarrow ①' + ② \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \text{Hは対称}$$

- 自己共役でない閉対称作用素のスペクトルは

$$\sigma(H) = \mathbb{C} \quad \text{or} \quad 上(下)半平面.$$

定義域 $D(H)$ は重要!

- $H (= H^*)$ はハミルトニアンとする.

$$\langle \psi, F(H)\psi \rangle = \int_{\sigma(H)} F(\lambda) \, d\|P(\lambda)\psi\|^2$$

によって, $F(H)$ が定義できる.

特に, $F(\lambda) = e^{-it\lambda}$ は重要で,

$$\psi(t) := e^{-itH}\psi, \quad \psi \in D(H)$$

$$\Rightarrow i\frac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi \in D(H)$$

- $\sigma_p(H)$ は重要：

$$E \in \sigma_p(H) \Rightarrow {}^{\exists}\psi_E \in D(H) \text{ s.t. } H\psi_E = E\psi_E$$

$$\Rightarrow \psi_E(t) := e^{-itH}\psi_E = e^{-itE}\psi_E$$

$$|e^{-itE}| = 1 \quad \therefore \underset{\psi_E(t)}{\underset{\parallel}{e^{-itE}\psi_E}} \sim \psi_E.$$

固有状態 $\psi_E$ は安定！

- 基底状態の定ギ：

・ $\inf \sigma(H) > -\infty$ のとき，H は下に有界という．

この場合，

$E_0(H) := \inf \sigma(H)$ ：基底エネルギー

・ H が基底状態を持つ $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $E_0(H) \in \sigma_p(H)$ ．

この場合，

$\psi_0 \in \operatorname{Ran} P(\{E_0(H)\})$ （ $E_0(H)$ の固有空間への射影）

を基底状態と呼ぶ．

n準位系は基底状態を持つ，

基底状態を持たない量子系もある．

QMの例2 (nonrelativistic free particle) $d=1$

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$$

$$H_0 = -\frac{\Delta}{2} \approx -\frac{d^2}{dx^2}$$

$$(H_0\psi)(x) = \left(\frac{|k|^2}{2}\hat{\psi}\right)^\vee(x)$$

$$D(H_0) = H^2(\mathbb{R}) = \left\{\psi\in\mathcal{H} \,\middle|\, |k|^2\hat{\psi}(k)\in L^2(\mathbb{R}_k)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(H_0) = [0,\infty), \quad \sigma_p(H_0) = \phi$$

基底状態を持たない.

(∵)

• $\sigma_p(H) = \phi \iff$ $H-\lambda$ は単射 $(\lambda\in\mathbb{R})$

$(H_0-\lambda)\psi = 0$ とすると,

$$\left(\frac{|k|^2}{2}-\lambda\right)\hat{\psi}(k) = 0 \quad \therefore\ \hat{\psi}(k) = 0 \quad \text{a.e. } k.$$

$$\therefore\ \psi = 0.$$

• $\sigma(H_0) = [0,\infty)$ は「$H-\lambda$ は全射でない $(\lambda\geq 0)$」を示せば十分.

全射 $\Rightarrow$ $\forall f\in\mathcal{H}: (H-\lambda)\psi = f \quad (\exists\psi\in\mathcal{H})$

$$\Rightarrow \quad \hat{\psi}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{\frac{|k|^2}{2}-\lambda} = \frac{\hat{f}(k)}{\frac{k}{2}-\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1}{\frac{k}{2}+\sqrt{\lambda}}$$

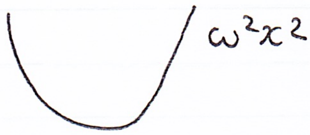
$\hat{f}(2\sqrt{\lambda}) = 1$, $\hat{f}$ : conti $\Rightarrow$ $\psi \notin \mathcal{H}$. ムジュン

//

## QMの例3 (調和振動子)

$$H = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\omega^2}{2}x^2, \qquad \omega > 0$$

$$D(H) = H^2(\mathbb{R}) \cap D(x^2)$$




**Fact:** Hは自己共役で

$$\sigma(H) = \sigma_p(H) = \left\{ \omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

特に基底状態を持つ.

Proof.) ・ $P \simeq -i\dfrac{d}{dx}$, $D(P) = H^1(\mathbb{R})$

$$(P\psi)(x) = (k\hat{\psi})^{\vee}(x)$$

・ $Q = x\cdot$, $D(Q) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid x\psi \in \mathcal{H}\}$

$$(Q\psi)(x) = x\psi(x)$$

とすると,

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}Q^2, \qquad D(H) = D(P^2) \cap D(Q^2)$$

・ $a := \dfrac{1}{\sqrt{2\omega}}(iP + \omega Q)$, $D(a) = D(P) \cap D(Q)$ : 閉作用

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(-iP + \omega Q), \qquad D(a^*) = D(a)$$

このとき,

$$a^*a = \frac{1}{2\omega}(P^2 + \omega^2 Q^2) - \frac{i}{2}[P, Q]$$

$$[P, Q] := PQ - QP = -i$$

$$[P, Q]\psi = -i\frac{d}{dx}(x\psi) + ix\frac{d}{dx}\psi = -i\psi \overbrace{-ix\frac{d}{dx}\psi + ix\frac{d}{dx}\psi}^{=0}$$

$$\therefore\quad a^*a = \frac{1}{\omega}H - \frac{1}{2} \qquad \text{on } D(a^*a)$$

$\therefore\quad H = \omega\left(a^*a + \frac{1}{2}\right)$ on $D(H)$ は自己共役

・一般に， $A$：閉 $\Rightarrow$ $A^*A$：自己共役

・自己共役作用素は非自明な対称作用素の拡大を持たない：

$S$：自己共役，$T$：対称，$S \subset T \Rightarrow S = T$.

・次の事実に注意：

$$\Omega_0(x) := \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\omega x^2/2}$$

とすると，

$$\cdot\quad a\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(iP + \omega Q)\Omega_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\frac{d}{dx} + \omega x\right)\Omega_0 = 0.$$

$$\cdot\quad \|\Omega_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\int e^{-\omega x^2}dx = 1$$

さらに，

$$\cdot\quad [a, a^*] = \frac{1}{2}\left(i[P,Q] + i[P,Q]\right) = i[P,Q] = 1.$$

・$N := a^*a$ とすると，

$$\Omega_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\Omega_0$$

とすると，

・ $N\Omega_0 = a^*(a\Omega_0) = 0$

・ $N\Omega_1 = a^*a\,a^*\Omega_0 = a^*(a^*a+1)\Omega_0 = a^*\Omega_0 = \Omega_1$

・ 同様にして,

$$N\Omega_n = n\Omega_n \quad , \quad n \geq 0 .$$

$H = \omega(N+\frac{1}{2})$ なので,

$$\sigma_p(H) = \{\omega(n+\tfrac{1}{2})\}_{n=0}^{\infty} .$$

● $\sigma_p(H)$ が $\sigma(H)$ を尽している事:

$\mathcal{H}_n := \{\alpha\Omega_n \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ とする.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \qquad \therefore P(\sigma_p(H)) = I$$

∵ $\Omega_n(x)$ は $L^2(\mathbb{R})$ の CONS. //

● 今わかった事: $\Omega_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\Omega_0$ n粒子状態 , $E_n := \omega(n+\frac{1}{2})$

$N\Omega_n = n\Omega_n$ n: 粒子数

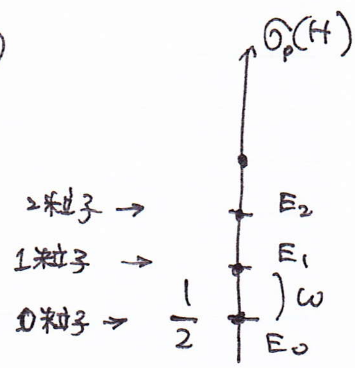
$a\Omega_{n+1} = \sqrt{n+1}\,\Omega_n$ , $a\Omega_0 = 0$

a: 消滅作用素 $\Omega_0$: 真空

$a^*\Omega_n = \sqrt{n+1}\,\Omega_{n+1}$

$a^*$: 生成作用素

$E_{n+1} - E_n = \omega$ ω: $a^*$で生成される粒子1つ分のエネルギー




$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{L}\{\Omega_0, (a^*)^n\Omega_0\}}$

・多次元への一般化（有限自由度のCCR）

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d), \quad a_j := \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(iP_j + \omega_j Q_j), \quad \omega_j > 0$$

$$P_j \approx -i\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Q_j := x_j \cdot \qquad \begin{cases} Q_j = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}\overline{(a_j + a_j^*)} \\ P_j = i\sqrt{\frac{\omega_j}{2}}\overline{(a_j^* - a_j)} \end{cases}$$

$$[a_j, a_k^*] = \delta_{jk}, \quad [a_j, a_k] = 0 = [a_j^*, a_k^*], \quad j, k = 1, \cdots, d$$

（自由度 $d$ の CCR）

$$H = \sum_{j=1}^{d} \omega_j (a_j^* a_j + \frac{d}{2})$$

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{L}\left(\left\{\Omega_0, \left(\prod_{j=1}^{n} a_{i_j}^*\right)\Omega_0 \middle| 1 \le i_1, \cdots, i_n \le d, \ n \ge 1\right\}\right)}$$

$$a_j \Omega_0 = 0, \ j = 1, \cdots, d$$

・場の量子論への一般化（無限自由度のCCR）

$$[a(k), a^*(k')] = \delta(k - k'), \quad [a(k), a(k')] = 0 = [a^*(k), a^*(k')]$$

$$k, k' \in \mathbb{R}^d \qquad \text{（無限自由度のCCR）}$$

$$H_f := \int \omega(k)\, a^*(k) a(k)\, dk, \qquad \omega(k) \ge 0$$

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{L}\left(\left\{\Omega, \left(\prod_{j=1}^{n} a^*(k_j)\right)\Omega \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)}$$

$$a(k)\Omega = 0, \quad k \in \mathbb{R}^d$$

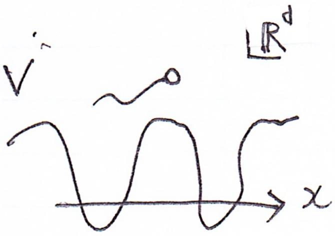
場：（$Q_j$ に対応）$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}(a(k) + a^*(k))$

共役場：（$P_j$ に対応）$\rightarrow i\sqrt{\frac{\omega(k)}{2}}(a^*(k) - a(k))$

## QMの例14 (ポテンシャル中を運動するNR particle)

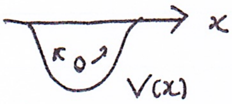
$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$, $H_0 = -\dfrac{\Delta}{2}$, $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$H := -\Delta + V$




$\underline{d=1,2}$ $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V \leq 0$

$\Rightarrow$ H has a ground state.




安定!

3次元ではヘコみが浅いと ×

$\underline{d=3}$

$$\|V\|_R^2 := \frac{1}{(4\pi)^2}\int \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}\,dx\,dy < \infty$$

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $V \in R$

- $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow V \in R$
- $V \in R$ and $\|V\|_R < 1 \Rightarrow H = -\Delta + V$ has no ground stat

(Birman-Schwinger 原理)

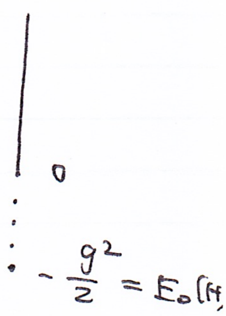
$\underline{\text{ex.}}$ $V_m(x) = -\dfrac{e^{-m|x|}}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $(m \geq 0)$

$H_g := H_0 + gV_m$, $g > 0$

注 $V_0 \notin R$

$\underline{m=0}$ $V_0(x) = -\dfrac{1}{|x|}$ (クーロンポテンシャル)

$\sigma_p(H_g) = \left\{-\dfrac{g^2}{2(n+1)^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\sigma(H) = \sigma_p(H) \cup [0,\infty)$




空間に固定された
水素原子は安定!

$\underline{m>0}$

$$V_m(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{(1-e^{-m|x|})}{|x|}$$

$$=: V_0(x) + W_m(x)$$

このとき，

$$0 \leq W_m(x) \leq m$$

$$H_g = (H_0 + gV_0) + gW_m$$

"離散固有値は摂動が小さいとき，安定."

・regular parturbation theory より，

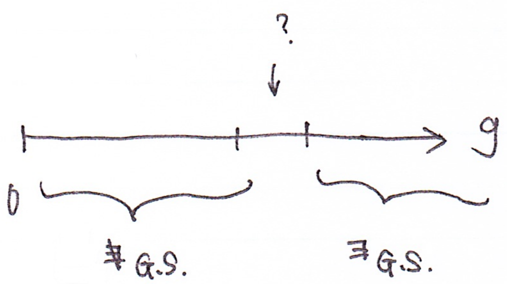
$$\frac{32m}{3} < g \Rightarrow H_g \text{は基底状態を持つ.}$$

・一方，B-S 原理より，

$$g\|V_m\|_R < 1 \Rightarrow H_g \text{は基底状態を持たない.}$$

$$\|V_m\|_R < \frac{4\pi}{m}\frac{\pi^{2/3}}{3}$$

$$\frac{1}{\|V_m\|_R} > \frac{3m}{4\pi\cdot\pi^{2/3}} > \frac{m}{4\pi}$$

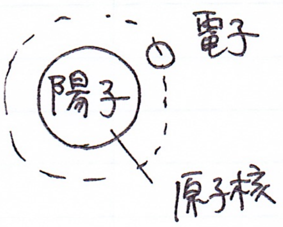



Enhanced Binding（束縛の強化）

参考文献
（宮尾 忠宏（2007）
数理研 講究録）

◦ なぜ QM でなくて，NRQFT か？

水素原子




① QM：

$$H_{at} := -\frac{\Delta_{x_0}}{2m_n} - \frac{\Delta_{x_1}}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi|x_0 - x_1|}$$

$$(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^6$$

$\Delta_{x_i}$ ： $x_i$ に関するラプラシアン　$(i=1,2)$

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^6)$$

，$m_n$ ：原子核の質量
$m_e$ ：電子の 〃
$e$ ：電荷

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{m_n + m_e}(m_n x_0 + m_e x_1) & \text{質量中心座標} \\ x = x_1 - x_0 & \text{相対座標} \end{cases}$$

$$H_{at} = -\frac{\Delta_y}{2M} - \frac{\Delta_x}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi|x|},$$

where

$$\mu := \frac{m_n m_e}{m_n + m_e}, \quad M := m_n + m_e$$

$$P_y := -i\nabla_y \quad (\text{重心系の運動量}) \qquad \sigma(P_y) = \mathbb{R}^3$$

$$[H, P_y] = 0, \quad \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{H}(P)\, dP, \quad \mathcal{H}(P) = L^2(\mathbb{R}^3; dx)$$

$$H_{at} = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_{at}(P)\, dP, \quad H_{at}(P) = \frac{P^2}{2M} - \frac{\Delta_x}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi|x|}$$

on $\mathcal{H}(P)$

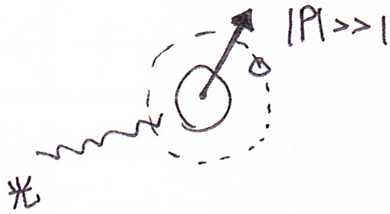
運動量 $P\in\mathbb{R}^3$ で動く
水素原子のハミルトニアン

「$\forall p \in \mathbb{R}$ : $H_{at}(p)$ has a ground state.」

現実の水素原子は

$|P| \ll 1$ (ゆっくり動く) $\Rightarrow$ 安定　O.K.

$|P| \gg 1$ (速く動く) $\Rightarrow$ チェレンコフ放射
(エネルギーを放出)




現実的な粒子を記述していない!

(光の生成・消滅を記述していない)

② (NR)QFT : 光の場と相互作用
(量子電磁場)

$P \in \mathbb{R}^3$ : 系の全運動量

$$H(P) = \frac{1}{2m_n}\left(P + i\nabla_x - P_f - A(0)\right)^2 + \frac{1}{2m_e}\left(-i\nabla_x + eA(x)\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi|x|} + H_f$$

$$\mathcal{H}(P) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$$

ボゾンフォック空間

$H_f$ : 場のエネルギー

$A(x)$ : 量子電磁場

$P_f$ : 場の運動量

Loss-Miyo-Spohn (2007)

「$\mu > 1$ とする. $|P| \ll 1 \Rightarrow H(P)$ は基底状態を持つ」

$|P| >> 1$ のときは，∄GS と予想されているが，未解決

- 以下では，より簡単な場合，$m_n \longrightarrow +\infty$ の極限（水素原子が固定されている），のみを考察する：

$$H := \frac{1}{2m_e}\left(-i\nabla_x + eA(x)\right)^2 + V(x) + H_f$$

（Pauli-Fierz 模型）

ここで，クーロンポテンシャルを一般の関数 $V(x)$ に置き換えた．

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{S}^{n} \left[\bigoplus^{2} L^2(\mathbb{R}^3)\right] \quad \text{with} \quad \bigotimes_{S}^{0}\left[\bigoplus^{2} L^2(\mathbb{R}^3)\right] = \mathbb{C}$$

$$H_f := \int dk \sum_{j=1}^{2} \omega(k)\, a_j^*(k)\, a_j(k), \quad \omega(k) = |k|,$$

where

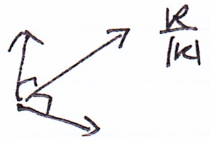
$$[a_i(k), a_j^*(k')] = \delta_{ij}\,\delta(k-k')$$

$$[a_i(k), a_j(k')] = 0 = [a_i^*(k), a_j^*(k')] \qquad \text{(CCR)}$$

$$A(x) = \sum_{j=1}^{2} \int dk \left[ a_j^*(k) \frac{e^{-ik\cdot x}\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} + a_j(k) \frac{e^{ik\cdot x}\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \right] e_j(k),$$

- $e_j(k) \in \mathbb{R}^3$, $\quad e_j(k) \cdot e_i(k) = \delta_{ij}$, $\quad j = 1,2$

$$e_j(k) \cdot \frac{k}{|k|} = 0$$




- $\hat{\varphi}(k) \geq 0$, $\quad \hat{\varphi}(k) = \hat{\varphi}(-k)$, $\quad \varphi \in \mathcal{S}$

(UV cutoff)

QM : $\quad \overset{\bullet}{x}$ 電荷密度 $\delta(\cdot - x)$

$\Downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

QFT :  $\varphi(\cdot - x)$



<u>CCR:</u>

$$\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}, \quad \Psi^{(n)} = \{\Psi^{(n)}_{j_1,\cdots,j_n}\}_{j_1,\cdots,j_n = 1,2}$$

$$\Psi^{(n)}_{j_1,\cdots,j_n}(k_1,\cdots,k_n) \in L^2(\mathbb{R}^{3n}), \quad j_i = 1,2$$

$$\parallel$$

$$\Psi_{j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(n)}}(k_{\sigma(1)},\cdots,k_{\sigma(n)})$$

$$a_j(k)\Psi = \left\{ (a_j(k)\Psi)^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$(a_j(k)\Psi)^{(n)}_{j_1,\cdots,j_n} = \sqrt{n+1}\,\Psi^{(n+1)}_{j,j_1,\cdots,j_n}(k, k_1,\cdots,k_n)$$

$$a_j(f)\Psi := \int dk\, \bar{f}(k)\, a_j(k)\Psi$$

$$:= \left\{ \int dk \bar{f}(k) \Psi^{(n)}(k) \right\}_{n=0}^{\infty} \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

形式的に,

$$a_j(f)^* = \int dk\, f(k)\, a_j(k)^* \quad \text{と書く.}$$

$$\therefore A(x) = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a_j^*\left( \frac{e^{-ik\cdot x}\hat{\varphi}}{\sqrt{\omega}} e_j \right) + a_j\left( \frac{e^{-ik\cdot x}\hat{\varphi}}{\sqrt{\omega}} e_j \right) \right)$$

$$[a_i(f), a_j(g)^*] = \delta_{ij} \langle f, g \rangle_{L^2} \quad , \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$= \delta_{ij} \int dk \int dk'\, \delta(k-k')\, \bar{f}(k) g(k')$$

形式的に

$$[a_i(k), a_j(k')^*] = \delta_{ij}\, \delta(k-k').$$

---

$$H = H(e) = \frac{1}{2m_e} \left( -i\nabla_x \otimes 1 + eA(x) \right)^2 + V(x) \otimes 1 + 1 \otimes H_f$$

$$H(0) = \underbrace{\left( \frac{-\Delta x}{2m_e} + V(x) \right)}_{=: H_p} \otimes 1 + 1 \otimes H_f$$

$$\sigma(H(0)) = \{ \lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma(H_p), \mu \in \sigma(H_f) \} = \{ \lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma(H_p), \mu \in [0, \infty) \}$$

$$\sigma_p(H(0)) = \{ \lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma_p(H_p), \mu \in \sigma_p(H_f) \} = \sigma_p(H_p)$$

• $\sigma(H_p)$ は比較的によくわかる.

• $\sigma(H_f) = [0, \infty)$ , $\sigma_p(H_f) = \{0\}$

☺ 後者は、$\underbrace{\Omega = \{1, 0, 0, \cdots\}}_{\text{真空}} \in \mathcal{F}$ とすると,

$$a_j(k)\Omega = 0$$

$$\therefore\ H_f\Omega = \int dk \sum_j \omega(k)\, a_j(k)^* \left(a_j(k)\, \Omega\right) = 0 .$$

"

ちなみに,

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}\left(\left\{ a_{j_1}(f_1)^* \cdots a_{j_n}(f_n)^* \Omega, \Omega \;\middle|\; 1 \le j_i \le 2,\ i = 1, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N},\ f_j \in L^2 \right\}\right)$$

$$N := \int dk \sum_j a_j(k)^* a_j(k) \text{ は,}$$

$$N\, a_{j_1}^*(f_1) \cdots a_{j_n}^*(f_n)\Omega = n\, a_{j_1}^*(f_1) \cdots a_{j_n}^*(f_n)\Omega$$

などを満たす.

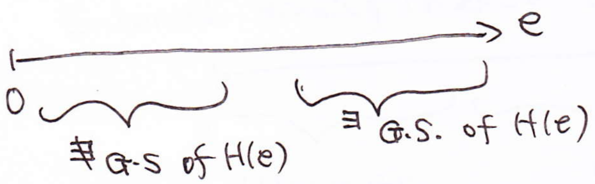
• $\sigma(H(0)) = [E_0(H_p), \infty)$ , $E_0(H_p) := \inf \sigma(H_p)$

Schrödingerと違って、正則摂動論が使えない!!

$$\inf \sigma(H(0)) = E_0(H_p)$$

$H(0)$がG.S.を持つ $\Longleftrightarrow$ $H_p$がGSを持つ

• Enhanced Binding は決まるか?




適当な$V(x)$につき、ある領域$D \subset (0, \infty)$と

$\nexists$ G.S. of $H(e)$ , $e \in D$

となる事を示せ! (未解決)

Dipole 近似　　$A(x) \longrightarrow A(0)$ と置き換える：

$$H_{dip}(e) := \frac{1}{2m_e}\left(-i\nabla_x + eA(0)\right)^2 + V(x) + H_f$$

仮定：① $V \in C_0^\infty$ , $V \leq 0$

② $m_e \|V\|_R < 1$ .

( ② $\Rightarrow$ $-\frac{\Delta}{2m_e} + V$ has no G.S. )

$\therefore$ $H_{dip}(0)$ has no G.S.

③ $^\exists \varepsilon_0 > 0$, $^\exists \gamma_0 > 0$ s.t. $^\forall \varepsilon > \varepsilon_0$

$$E_0\left(-\frac{\Delta}{2m_e} + (1+\varepsilon)V\right) \leq -\gamma_0$$

( ③ $\Rightarrow$ $-\frac{\Delta}{2m_e} + (1+\varepsilon)V$ has a G.S. )

④ $\hat{\varphi}(k) > 0$ $(|k| \neq 0)$ ; $\hat{\varphi}(Rk) = \hat{\varphi}(k)$, $^\forall R \in SO(3)$ ; $\frac{\hat{\varphi}}{\omega^{5/2}} \in L^2$.

$V(x) \longrightarrow V_\kappa(x) := \frac{1}{\kappa^2} V\left(\frac{x}{\kappa}\right)$

$H_{dip}(e) \longrightarrow H_\kappa(e)$ 　　と置き換える.

- $\|V\|_R = \|V_\kappa\|_R$ なので,

$^\forall \kappa > 0$ : $H_\kappa(0)$ has no ground state.

「**定理** ( Hiroshima–Spohn (2001))

$\kappa \gg 1,\ |e| > e_c := \sqrt{\frac{3m_e}{2}}\, \varepsilon_0^{1/2} \|\hat{\varphi}/\omega\|^{-1}$

$\Rightarrow$ $H_\kappa(e)$ has a G.S.」

「**定理** ( H-S- Suzuki (2010))

$m_{\mathrm{eff}} := m_e + e^2 \left(\frac{2}{3}\right) \|\hat{\varphi}/\omega\|^2$ (effective mass)

$D_V := \pi \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right)^{1/2} \left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right)^{\frac{1}{3}} \|V\|_{\frac{3}{2}} \quad (= D_{V_\kappa})$

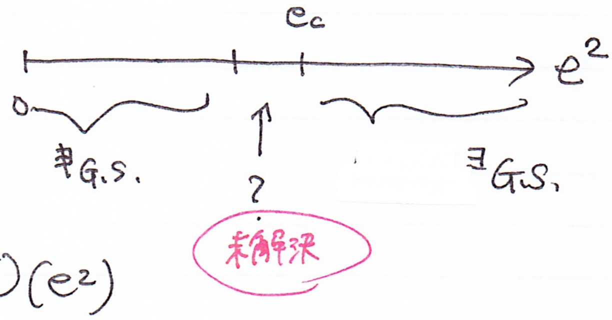
- $4 D_V m_{\mathrm{eff}} < 1 \Rightarrow H_\kappa(e)$ has no ground state.

$\Updownarrow$

$|e| < \sqrt{\frac{3m_e}{2}} \left(\frac{1}{4D_V} - m_e\right)^{1/2} \|\hat{\varphi}/\omega\|^{-1}$

$\parallel$

$\sqrt{\frac{3m_e}{2}} \left(\frac{1}{4m_e D_V} - 1\right)^{1/2} \|\hat{\varphi}/\omega\|^{-1}$」




$$H_\kappa(e) \sim -\frac{\Delta}{2m_{\mathrm{eff}}} + V_\kappa + O(e^2)$$

$$\parallel$$

$$\frac{m_e}{m_{\mathrm{eff}}}\left(-\frac{\Delta}{2m_e} + \frac{m_{\mathrm{eff}}}{m_e} V_\kappa\right)$$

$$\frac{m_{\mathrm{eff}}}{m_e} = 1 + O(e^2) > 1$$