

Introduction to Costello's formulation of perturbative quantum field theory

Kiyonori GOMI

May 13, 2013

話したいこと

Kevin Costello による摂動的量子場の理論の定式化の紹介:

K. Costello,

“Renormalization and effective field theory”.

Mathematical Surveys and Monographs, 170.

American Mathematical Society,

Providence, RI, 2011.

内容

- ① Introduction
- ② Stable graph
- ③ Weight
- ④ Formulation

量子場の理論 (quantum field theory, QFT)

- 素粒子の振る舞いを記述する物理理論の一つである.
- その考え方は現代数学に大きな影響を及ぼしている.

Costello による定式化

- 透明性が高く, 概念的に理解しやすい数学的な定式化である.
- 物理において知られているものと同じ結果が得られる.
- 哲学: 低エネルギー有効理論 (low energy effective theory)

低エネルギー有効理論のアイデア: スカラー場の理論の場合

- 時空としてコンパクト有向リーマン多様体 M を考える.
- 場全体の空間として $C^\infty(M, \mathbb{R})$ を考える.
- 作用汎関数 $S : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$S(\phi) = Q(\phi) + I(\phi)$$

$$\begin{cases} Q(\phi) &= -\frac{1}{2} \langle \phi, (D + m^2) \phi \rangle & \text{運動項} \\ I(\phi) &= c \int_{x \in M} \phi^3(x) d\text{vol}_M & \text{相互作用項} \end{cases}$$

ただし, D は計量から定まるラプラシアンである.

- 古典論において, ϕ は S の停留点を実現すると考える.

量子論

- 量子論においては分配関数や相関関数が興味ある量である.

$$Z = \int_{\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R})} \mathcal{D}\phi e^{\hbar^{-1} S(\phi)},$$

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R})} \mathcal{D}\phi e^{\hbar^{-1} S(\phi)} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n).$$

($\hbar$ はプランク定数で, $x_1, \dots, x_n \in M$ はある点である.)

- 困難: 測度 $\mathcal{D}\phi$ に直接意味を持たせることができない.

$\Rightarrow$ 小さい $\hbar$ の展開に意味を持たせる.(摂動展開, 繰り込み)

低エネルギー有効理論

- 実際の実験ではある有限範囲までしか調べられない.
- 発散はいくらでも高いエネルギーの場を考えることによる.
- $\Lambda < \Lambda'$ に対して, 次のようにおく:

$$C^\infty(M, \mathbb{R})_{[\Lambda, \Lambda')} = \bigoplus_{\lambda \in [\Lambda, \Lambda')} \text{Ker}(D - \lambda).$$

- エネルギーレベル Λ の**有効相互作用**を次で定める.

$$I_\Lambda : C^\infty(M, \mathbb{R})_{[0, \Lambda)} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_\Lambda(\phi_L) = \hbar \log \int_{\phi_H \in C^\infty(M, \mathbb{R})_{[\Lambda, \infty)}} \mathcal{D}\phi_H e^{\hbar^{-1}(Q(\phi_H) + I(\phi_H + \phi_L))}.$$

低エネルギー有効理論

- 有効相互作用 I_Λ について次が “成り立つ”:

$$Z = \int_{\phi_L \in C^\infty(M, \mathbb{R})_{[0, \Lambda)}} \mathcal{D}\phi_L e^{\hbar^{-1}(Q(\phi_L) + I_\Lambda(\phi_L))},$$

$$I_\Lambda(\phi) = \hbar \log \int_{\phi_H \in C^\infty(M, \mathbb{R})_{[\Lambda, \Lambda')}} \mathcal{D}\phi_H e^{\hbar^{-1}(Q(\phi_H) + I_{\Lambda'}(\phi_H + \phi))}.$$

- 二番目の式 (**繰り込み群方程式**) が成り立つような $\{I_\Lambda\}_\Lambda$ を意味づけることで, Z に意味づけをすることができる.
- Costello の定式化では, この考えに従って, 有効相互作用 と 繰り込み群方程式 が中心的な役割を果たす.

‘定理’[Costello]

繰り込み処方ごとに次の全単射が得られる:

$$\{\text{“局所汎関数”}\} \cong \{\text{“理論”}\}$$

- コンパクト多様体上のスカラー場の理論の場合に, 概要を説明する.
- 非コンパクト多様体上や, ゲージ理論に対しても同様の結果がある.
- $\mathbb{R}^n$ の場合には, ‘局所繰り込み群作用’ を考えることで, 繰り込み可能性の概念を定式化することができる.
- $\mathbb{R}^n$ 上の繰り込み可能スカラー場理論の (再) 分類.
- $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills 理論の繰り込み可能性の (再) 証明.
(あるコホモロジーの計算をすることで証明している.)

Costello の定式化において “理論” を与えるために, 「安定グラフ」に対応したある「重み」が必要になる. これらを次に説明する.

内容

- ① Introduction
- ② Stable graph (Next)
- ③ Weight
- ④ Formulation

§2 Stable graph

定義

安定グラフ (stable graph) γ は次のデータからなる:

$$\gamma = (H(\gamma), V(\gamma), \pi, \sigma, g)$$

- $H(\gamma)$ 有限集合 (half edges),
- $V(\gamma)$ 有限集合 (vertices),
- $\pi : H(\gamma) \rightarrow V(\gamma)$ 写像,
- $\sigma : H(\gamma) \rightarrow H(\gamma)$ involution ($\sigma^2 = 1$),
- $g : V(\gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 種数 (genus), 任意の $v \in V(\gamma)$ について $2(g(v) - 1) + |\pi^{-1}(v)| > 0$ が成り立つ.

幾何学的実現

$$\sigma \curvearrowright H(\gamma) \xrightarrow{\pi} V(\gamma) \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$2(g(v) - 1) + |\pi^{-1}(v)| > 0$$

- 安定グラフ γ の幾何学的実現 $|\gamma|$ を次で定める:

$$\left(V(\gamma) \sqcup (H(\gamma) \times [0, 1/2]) \right) / \begin{matrix} (h, 0) \sim \pi(h) \\ (h, 1/2) \sim (\sigma(h), 1/2) \end{matrix}.$$

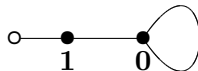
例

$$H = \{h_1, \dots, h_5\} \xrightarrow{\pi} V = \{v_1, v_2\},$$

$$\pi(h_1) = \pi(h_2) = v_1,$$

$$\pi(h_3) = \pi(h_4) = \pi(h_5) = v_2,$$

$$\sigma(h_1) = h_1, \sigma(h_2) = h_3, \sigma(h_4) = h_5.$$



自己同型

定義

安定グラフ γ の自己同型 $f = (f_H, f_V)$ は次のデータからなる:

$$\begin{array}{ccc} H(\gamma) & \xrightarrow{f_H} & H(\gamma) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V(\gamma) & \xrightarrow{f_V} & V(\gamma), \end{array} \quad \sigma f_H = f_H \sigma, \quad f_V^* g = g.$$

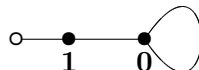
例

$$\text{Aut} \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \\ \quad \quad 1 \quad \quad 0 \end{array} \right) \cong \mathbb{Z}/2.$$

安定グラフについてその他

- γ の尾 (tail) と辺 (edge) の集合を次のように定める:

$$\begin{aligned} T(\gamma) &= \{h \in H(\gamma) \mid \sigma(h) = h\}, \\ E(\gamma) &= (H(\gamma) \setminus T(\gamma)) / \sigma. \end{aligned}$$



- 安定グラフ γ の種数 (genus) を次で定める:

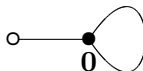
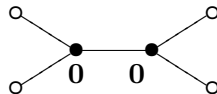
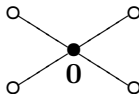
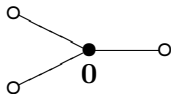
$$g(\gamma) = b_1(|\gamma|) + \sum_{v \in V(\gamma)} g(v).$$

$$(\chi(|\gamma|) = b_0(|\gamma|) - b_1(|\gamma|) = |V(\gamma)| - |E(\gamma)|)$$

- $\Gamma(g, k) = \{ \text{種数 } g \text{ で尾の本数 } k \text{ の連結安定グラフ} \}.$

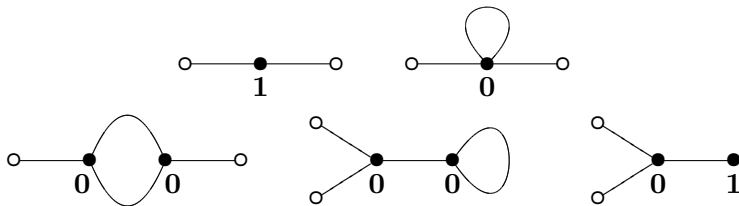
連結安定グラフの例

$ \Gamma(g, k) $	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$g = 0$	0	0	0	1	2	3
$g = 1$	0	2	5	11		
$g = 2$	7	16	60			



連結安定グラフの例

$ \Gamma(g, k) $	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$g = 0$	0	0	0	1	2	3
$g = 1$	0	2	5	11		
$g = 2$	7	16	60			



§3 Weight

安定グラフに対応したある「重み」を定義することが目標.

- ベクトル空間上の形式的多項式関数環
- グラフに対応した重み

形式的多項式関数環

定義

U を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする.

- 次数 k の多項式の空間

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k(U) &:= \left\{ f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \exists \tilde{f} \in \text{Hom}(U^{\otimes k}, \mathbb{R})_{S_k}, \\ f(u) = \tilde{f}(u, \dots, u) \end{array} \right\} \\ &\cong \text{Hom}(U^{\otimes k}, \mathbb{R})_{S_k}. \end{aligned}$$

- U 上の形式的多項式環 $\mathcal{O}(U) := \prod_{k \geq 0} \mathcal{O}_k(U)$.
- $D : \mathcal{O}_k(U) \rightarrow \text{Hom}(U^{\otimes k}, \mathbb{R})_{S_k}$ を次で定める:

$$\begin{aligned} (Df)(a_1, \dots, a_k) &= (D_{a_1} \cdots D_{a_k} f)(0) \quad (\text{方向微分}) \\ &= k! \tilde{f}(a_1, \dots, a_k). \end{aligned}$$

安定グラフに対応した重み

定義

$P \in \text{Sym}^2 U$, $I = \sum_{g,k} \hbar^g I_{g,k} \in \mathcal{O}(U)[[\hbar]]$ ($I_{g,k} \in \mathcal{O}_k(U)$)
と $\gamma \in \Gamma(g, n)$ に対し, $w_\gamma(P, I) \in \mathcal{O}_n(U)$ を以下で定める.

- ① 各頂点 (種数 g , 次数 k) に $DI_{g,k}$ を置いて次のベクトル空間の要素を得る:

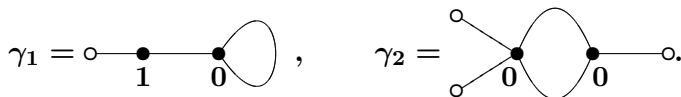
$$\text{Hom}(U^{\otimes |H(\gamma)|}, \mathbb{R}).$$

- ② 各辺に P , 各尾に $a \in U$ を置いて次のベクトル空間の要素を得る:

$$U^{\otimes |E(\gamma)|} \otimes U^{\otimes |T(\gamma)|} \cong U^{\otimes |H(\gamma)|}.$$

- ③ 上の二つの要素を縮約したものを $w_\gamma(P, I)(a) \in \mathbb{R}$ とする.

重みの例



- $P = \sum_i P'_i \otimes P''_i \in \text{Sym}^2 U$ と表す.
- $w_{\gamma_1}(P, I)(a)$ は次で与えられる:

$$\sum_{i,j} DI_{1,2}(a, P'_i) DI_{0,3}(P''_i, P'_j, P''_j).$$

- $w_{\gamma_2}(P, I)(a)$ は次で与えられる:

$$\sum_{i,j} DI_{0,4}(a, a, P'_i, P'_j) DI_{0,3}(P''_i, P''_j, a).$$

$$\mathcal{O}^+(U)[[\hbar]] := \left\{ \sum_{g,k} \hbar^g I_{g,k} \in \mathcal{O}(U)[[\hbar]] \mid \begin{array}{l} I_{g,k} = 0 \\ 2(g-1) + k \leq 0 \end{array} \right\}.$$

定義

与えられた $P \in \text{Sym}^2 U$, $I \in \mathcal{O}^+(U)[[\hbar]]$ に対し,
 $W(P, I) \in \mathcal{O}^+(U)[[\hbar]]$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} W(P, I) &= \sum_g \hbar^g W_g(P, I) = \sum_{g,k} \hbar^g W_{g,k}(P, I) \\ &= \sum_{g,k} \hbar^g \sum_{\gamma \in \Gamma(g,k)} \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma)|} w_\gamma(P, I). \end{aligned}$$

重みの性質

定理

$P_1, P_2 \in \text{Sym}^2 U$ と $I \in \mathcal{O}^+(U)[[\hbar]]$ に対し次が成り立つ:

$$W(P_1, W(P_2, I)) = W(P_1 + P_2, I).$$

重みの性質

定理

$P_1, P_2 \in \text{Sym}^2 U$ と $I \in \mathcal{O}^+(U)[[\hbar]]$ に対し次が成り立つ:

$$W(P_1, W(P_2, I)) = W(P_1 + P_2, I).$$

注意 U が無限次元でも, 次の設定において上の定理が成り立つ:

- U a nuclear Frechet space.
- $\otimes$ the completed projective tensor product.

(e.g. $U = C^\infty(M, \mathbb{R})$, M : compact)

注意: 積分の展開と重み—‘Wick の定理’

- 有限次元な U 上の負定値 2 次形式 $Q = -\sum_i e_i^* \otimes e_i^*$ に対し, $P = \sum_i e_i \otimes e_i \in \text{Sym}^2(U)$ とする. このとき任意の $I \in \mathcal{O}^+(U)[[\hbar]]$ に対し ‘漸近展開’ の意味で次が成り立つ:

$$W(P, I)(a) = \hbar \log \int_{x \in U} \mathcal{D}x e^{\hbar^{-1}(Q(x) + I(x+a))}.$$

ただし, $\mathcal{D}x$ は次のように正規化された測度である:

$$\int_{x \in U} \mathcal{D}x e^{\hbar^{-1}Q(x)} = 1.$$

- スカラー場の設定 $U = C^\infty(M, \mathbb{R})$ に形式的に適用する.

$$Q(\phi) = -\frac{1}{2} \langle \phi, (D + m^2)\phi \rangle, \quad I(\phi) = c \int_{x \in M} \phi(x)^3 d\text{vol}.$$

- すると、次の対応がある:

$$\text{有効相互作用} \quad I_\Lambda = W(P(\Lambda, \infty), I),$$

$$\text{繰り込み群方程式} \quad I_\Lambda = W(P(\Lambda, \Lambda'), I_{\Lambda'}).$$

ただし、 $P(\Lambda, \Lambda')$ は D の固有値 λ_i の固有ベクトル e_i を用いて次のように表示されるものである:

$$P(\Lambda, \Lambda') = \sum_{\Lambda \leq \lambda_i < \Lambda'} \frac{1}{\lambda_i + m^2} e_i \otimes e_i.$$

- $P(\Lambda, \infty) \notin C^\infty(M^2, \mathbb{R})$ を含む I_Λ は well-defined でない.
($P(0, \infty)$ は $(D + m^2)^{-1}$ の積分核, propagator.)

- 然るべき I_Λ は相殺項を導入することで構成できる.
(最初の定理における ‘汎関数’ から ‘理論’ の構成/量子化)
- 実際の構成では, energy scale cut off propagator

$$P(\Lambda, \Lambda') = \sum_{\Lambda \leq \lambda_i < \Lambda'} \frac{1}{\lambda_i + m^2} e_i \otimes e_i$$

ではなく, length scale cut off propagator

$$P(\epsilon, L) = \sum_i \frac{e^{-\epsilon(\lambda_i + m^2)} - e^{-L(\lambda_i + m^2)}}{\lambda_i + m^2} e_i \otimes e_i$$

を用いる. (高エネルギー $\Leftrightarrow$ 短距離)

- $P(\epsilon, L)$ を使うのは, 汎関数の局所性の議論のため.
(propagator の間のある種の同値性が存在する.)

§4 Formulation

Costello による摂動的場の理論の定式化と定理の説明をする.

‘定理’[Costello]

繰り込み処方ごとに次の全単射が得られる:

$$\{\text{“局所汎関数”}\} \cong \{\text{“理論”}\}$$

- $P(\epsilon, L)$
- 場の理論の定式化
- 汎関数の局所性
- 繰り込み処方
- 定理
- 証明の概要

$$P(\epsilon, L)$$

- コンパクト有向リーマン多様体 M 上の $U = C^\infty(M, \mathbb{R})$ に作用するラプラシアンを D とし, $m > 0$ とする.
- $D + m^2$ の熱核 (heat kernel) とは次のような関数である:

$$K_\ell(x, y) \in C^\infty((0, \infty) \times M \times M, \mathbb{R})$$

$$K_\ell(x, y) = \sum_i e^{-\ell(\lambda_i + m^2)} e_i(x) e_i(y).$$

- K_ℓ は熱作用素 $e^{-\ell(D+m^2)}$ の積分核である:

$$\int_{y \in M} K_\ell(x, y) \phi(y) d\text{vol} = (e^{-\ell(D+m^2)} \phi)(x).$$

- $P(\epsilon, L) := \int_{\ell=\epsilon}^{\ell=L} K_\ell d\ell \in U^{\otimes 2}$. ($0 < \epsilon \leq L \leq +\infty$)

摂動的量子場の理論の定式化

定義 [Costello]

摂動的量子場の理論 (pQFT, theory) とは関数の族

$$\{ I[L] \in \mathcal{O}^+(C^\infty(M, \mathbb{R}))[[\hbar]] \}_{L \in (0, +\infty]}$$

で次を満たすもののことである:

- 繰り込み群方程式を満たす:

$$I[L] = W(P(\epsilon, L), I[\epsilon]).$$

- 小さい L についての漸近展開を持つ.
(small L asymptotic expansion)
- 理論全体のなす集合を $\mathcal{T}^{(\infty)}$ と書く.

汎関数の局所性

定義

関数 $I = \sum_k I_k \in \mathcal{O}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ が**局所的 (local)** であるとは、各 $I_k \in \mathcal{O}_k(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ が次の表示を持つことである:

$$I_k(a) = \sum_{j=1}^s \int_M D_{1,j}(a) \cdots D_{k,j}(a) d\text{vol}$$

ここで, $D_{i,j}$ は M 上のある微分作用素である.

- 局所的な関数のなす部分空間を次のように書く:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{loc}}(C^\infty(M, \mathbb{R})) &\subset \mathcal{O}(C^\infty(M, \mathbb{R})), \\ \mathcal{O}_{\text{loc}}^+(C^\infty(M, \mathbb{R}))[[\hbar]] &\subset \mathcal{O}^+(C^\infty(M, \mathbb{R}))[[\hbar]]. \end{aligned}$$

繰り込み処方 (renormalization scheme)

事実

$C^\infty((0, 1), \mathbb{R})$ の中に **周期 (period)** と呼ばれる実解析的関数からなる部分代数 $\mathcal{P}((0, 1))$ がある. (cf. Kontsevich-Zagier)

$$\mathcal{P}((0, 1))_{\geq 0} := \{f \in \mathcal{P}((0, 1)) \mid \exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon)\}.$$

定義

繰り込み処方とは, $\mathcal{P}((0, 1))_{\geq 0} \subset \mathcal{P}((0, 1))$ のある補空間 $\mathcal{P}((0, 1))_{> 0}$ のことである:

$$\mathcal{P}((0, 1))_{\geq 0} \oplus \mathcal{P}((0, 1))_{> 0} = \mathcal{P}((0, 1)).$$

定理

定理 [Costello]

繰り込み処方ごとに次の全単射が得られる:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{loc}}^+(C^\infty(M, \mathbb{R}))[[\hbar]] &\xrightarrow{\cong} \mathcal{T}^{(\infty)}. \\ I &\mapsto \{I[L]\}_{0 < L \leq \infty} \end{aligned}$$

定理

定理 [Costello]

繰り込み処方ごとに次の全単射が得られる:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{loc}}^+(C^\infty(M, \mathbb{R}))[[\hbar]] &\xrightarrow{\cong} \mathcal{T}^{(\infty)}. \\ I &\mapsto \{I[L]\}_{0 < L \leq \infty} \end{aligned}$$

- 構成 $I \leftrightarrow \{I[L]\}$ そのものは単純な帰納法である.
- しかし漸近展開の存在などの証明は比較的長い.

証明の概要

- 帰納法のため, 集合

$$\{(g, k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 2g + n - 2 > 0\}$$

に次の順序を入れる:

$$(g', k') < (g, k) \Leftrightarrow \begin{cases} g' < g; \text{ or} \\ g' = g \text{ and } k' < k. \end{cases}$$

有効相互作用の構成

構成 $I \mapsto I[L]$

$$I[L] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(P(\epsilon, L), I - I^{\text{CT}}[\epsilon]),$$

$$I_{0,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = 0,$$

$$I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon, L] \text{ (} L \text{ に依らない)}$$

$$= \text{Sing}_\epsilon W_{g,k}(P(\epsilon, L), I - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon, L]).$$

$$I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon, L] = \sum_{g' < g} \sum_{k'} \hbar^{g'} I_{g',k'}^{\text{CT}}[\epsilon, L] + \sum_{k' < k} \hbar^g I_{g,k'}^{\text{CT}}[\epsilon, L],$$

$$\text{Sing}_\epsilon : \mathcal{P}((0, 1)_\epsilon) \longrightarrow \mathcal{P}((0, 1)_\epsilon)_{>0}.$$

(繰り込み処方が定める射影, 添え字 ϵ は考えている変数を明示する.)

構成 $I \mapsto I[L]$ をもう少し詳しく

$$I[L] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(P(\epsilon, L), I - I^{\text{CT}}[\epsilon]),$$

$$I_{0,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = 0,$$

$$I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon, L]$$

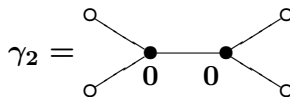
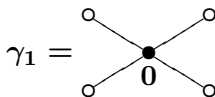
$$= \text{Sing}_{\epsilon} W_{g,k}(P(\epsilon, L), I - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon, L]).$$

- $\gamma \in \Gamma(0, k)$ は $b_1(\gamma) = 0$ を満たすことと, K_{ℓ} が熱作用素の積分核であることに注意すると, 次の極限が存在する.

$$I_{0,k}[L] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{0,k}(P(\epsilon, L), I).$$

- 例: $k = 3$ のとき, $W_{0,3}(P(\epsilon, L), I) = I_{0,3}$ である.

例: $k = 4$ のとき



$$\begin{aligned}
 W_{0,4}(P(\epsilon, L), I)(a) &= \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_1)|} w_{\gamma_1}(P(\epsilon, L), I)(a) \\
 &\quad + \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_2)|} w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I)(a), \\
 w_{\gamma_1}(P(\epsilon, L), I)(a) &= I_{0,4}(a), \\
 w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I)(a) &= \sum_i DI_{0,3}(a, a, P'_i) DI_{0,3}(P''_i, a, a). \\
 P(\epsilon, L) &= \sum_i P'_i \otimes P''_i
 \end{aligned}$$

例: $k = 4$ のとき

- 例えば, $I_{0,3}(a) = \frac{1}{3!} \int_{x \in M} a(x)^3 Dx$ と仮定する.

$$P(\epsilon, L) = \sum_i P'_i(x) \otimes P''_i(y) = \int_{\ell=\epsilon}^{\ell=L} K_\ell(x, y) d\ell.$$

$$\begin{aligned} w_{\gamma_2}(a) &= \sum_i DI_{0,3}(a, a, P'_i) DI_{0,3}(P''_i, a, a) \\ &= \sum_i \int_{x, y \in M} Dx Dy a(x)^2 P'_i(x) P''_i(y) a(y)^2 \\ &= \int_{\ell=\epsilon}^{\ell=L} d\ell \int_{x, y \in M} Dx Dy a(x)^2 K_\ell(x, y) a(y)^2 \\ &= \int_{\ell=\epsilon}^{\ell=L} d\ell \int_{x \in M} Dx a(x)^2 (e^{-\ell(D+m^2)} a^2)(x). \end{aligned}$$

帰納法の続き: $g = 1$ の場合

$$I[L] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(P(\epsilon, L), I - I^{\text{CT}}[\epsilon]),$$

$$I_{0,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = 0,$$

$$I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = \text{Sing}_{\epsilon} W_{g,k}(P(\epsilon, L), I - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon, L]).$$

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{\text{CT}}[\epsilon] &= \text{Sing}_{\epsilon} W_{1,1}(P(\epsilon, L), I - I_{<(1,1)}^{\text{CT}}[\epsilon]) \\ &= \text{Sing}_{\epsilon} W_{1,1}(P(\epsilon, L), I). \end{aligned}$$

$$I_{1,1}^{\text{CT}}[\epsilon] = \text{Sing}_\epsilon W_{1,1}(P(\epsilon, L), I)$$



$$W_{1,1}(P(\epsilon, L), I) = W_{1,1}(P(\epsilon, L), I_{\leq(1,1)})$$

$$= \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_1)|} w_{\gamma_1}(P(\epsilon, L), I_{\leq(1,1)})(a) \\ + \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_2)|} w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I_{<(1,1)})(a),$$

$$w_{\gamma_1}(P(\epsilon, L), I_{\leq(1,1)})(a) = I_{1,1}, \text{ (non-singular)}$$

$$w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I_{<(1,1)})(a) = \text{possibly singular},$$

$$I_{1,1}^{\text{CT}}[\epsilon] = \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_2)|} \text{Sing}_\epsilon w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I_{<(1,1)}).$$

$$I_{1,1}[L] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{1,1}(P(\epsilon, L), I - I^{\text{CT}}[\epsilon])$$

$$I_{1,1}^{\text{CT}}[\epsilon] = \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_2)|} \text{Sing}_{\epsilon} w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I_{<(1,1)}).$$

$$\begin{aligned} & W_{1,1}(P(\epsilon, L), I - I^{\text{CT}}[\epsilon]) \\ &= W_{1,1}(P(\epsilon, L), I_{\leq(1,1)} - I_{\leq(1,1)}^{\text{CT}}[\epsilon]) \\ &= \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_1)|} w_{\gamma_1}(P(\epsilon, L), I_{\leq(1,1)} - I_{\leq(1,1)}^{\text{CT}}[\epsilon]) \\ &\quad + \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_2)|} w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I_{<(1,1)} - I_{<(1,1)}^{\text{CT}}[\epsilon]), \\ &= I_{1,1} - I_{1,1}^{\text{CT}}[\epsilon] + \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma_2)|} w_{\gamma_2}(P(\epsilon, L), I_{<(1,1)}). \end{aligned}$$

($\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ が存在する.)

一般の場合

$v_{g,k}$ = genus g の頂点一つで k 本の tail を持つ.

$$\begin{aligned}
 & W_{g,k}(P(\epsilon, L), I - I^{\text{CT}}[\epsilon]) \\
 &= I_{g,k} - I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon] \\
 &+ \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(g,k) \\ \gamma \neq v_{g,k}}} \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma)|} w_{\gamma}(P(\epsilon, L), I_{<(g,k)} - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon]) \\
 &= I_{g,k} - I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon] + W_{g,k}(P(\epsilon, L), I_{<(g,k)} - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon]).
 \end{aligned}$$

第 3 項の特異部分を $I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon]$ と定めることで,
上の式は $\epsilon \rightarrow 0$ における極限を持つ.

$I[L] \rightarrow I$ の構成

構成 $I[L] \mapsto I$

$$I_{0,k} = I_{0,k}[L], \quad (L \text{ に依らない})$$

$$I_{g,k} = I_{g,k}[L] - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(P(\epsilon, L), I_{<(g,k)} - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon]),$$

$$I_{g,k}^{\text{CT}}[\epsilon] = \text{Sing}_{\epsilon} W_{g,k}(P(\epsilon, L), I_{<(g,k)} - I_{<(g,k)}^{\text{CT}}[\epsilon, L]).$$

- 上のように定めることで、定理の全単射が得られる。
- 対応 $I \leftrightarrow I[L]$ で、然るべき性質を持つ関数が得られていることを示すのに多くの評価を要する。

終わりに

- コンパクト多様体上のスカラー場の理論の場合を説明した.
- 非コンパクト多様体上/ゲージ理論の場合.
(fake heat kernel/BV formalism を使う.)
- $\mathbb{R}^n$ の場合には, (普通の熱核を使い) ‘局所繰り込み群作用’ を考えることで, 繰り込み可能性の概念を定式化できる.
($\mathbb{R}^n$ 上の繰り込み可能スカラー場理論の分類, $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills 理論の繰り込み可能性.)
- 観測可能量や相関関数の扱い [Costello-Gwilliam].
(Factorization algebra [Beilinson-Drinfeld] を用いる.)