合成作用素とC^*alg

九州大学 濱田(はまだ)さん.

§1. L^p空間上の合成作用素.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: σ-finite measurable sp.

$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$: measurable.

$(\varphi_*\mu)(E) := \mu(\varphi^{-1}(E)) \quad E \in \mathcal{F}$

$\varphi_*\mu$: measure on Ω

以下. φ : non-singular を仮定する.

($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(\varphi_*\mu)(E) = 0 \ (E \in \mathcal{F}) \Leftarrow \mu(E) = 0$).

$f \in L^p(\Omega)$ に対し.

$(C_\varphi f)(\omega) := f(\varphi(\omega))$ を定めることはできるが. $\underbrace{\text{bdd}}_{C_\varphi\text{が}}$ や $\underbrace{L^p}_{C_\varphi f\text{が}}$ に入るかなどが問題になる.

Thm (e.g. Singh-Manhas)

$1 \leq p < \infty$ のとき.

$C_\varphi : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$: bdd

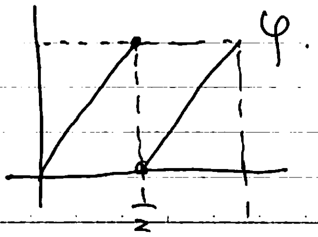
$\Longleftrightarrow \ ^\exists M > 0, \ (\varphi_*\mu)(E) \leq M\mu(E) \quad (^\forall E \in \mathcal{F})$

$\because$ ($\Leftarrow$) $f \in L^p(\Omega)$ に対し.

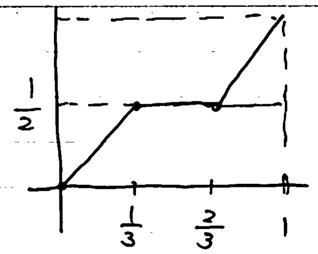
$$\|C_\varphi f\|_p^p = \int_\Omega |C_\varphi f|^p d\mu = \int_\Omega |f \circ \varphi|^p d\mu = \int_\Omega |f|^p d(\varphi_*\mu)$$

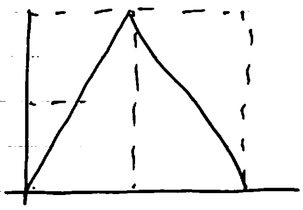
$$\leq M \cdot \int_\Omega |f|^p d\mu = M \cdot \|f\|_p^p.$$

Ex. (i).



C_φ は bdd とくに isometry.

(ii)  φ. だと. φ は non-singular だけど bdd でない.

(iii)  φ : C_φ : bdd とくに isometry.

§2. C^*-環.

<u>Def</u>. A : $\mathbb{C}$-alg. としておく.

A : C^*-alg

$\overset{\text{def}}{\iff}$ (i) A は $\|\cdot\|$ について Banach sp.

$\|ab\| \le \|a\| \cdot \|b\| \quad (\forall a, b \in A)$

(ii) $*$ をもつ.

(iii) $\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (\forall a \in A)$.

<u>Ex</u> (i) $M_n(\mathbb{C})$, (ii) $B(\mathcal{H})$ (iii) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

(iv) $C(\Omega)$: Ω は (locally) cpt Hausdorff, $f^*(\omega) = \overline{f(\omega)}$, $\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$

<u>Thm</u>.

(i) (Gelfand-Naimark) $1 \in A$ かつ可換 $\Rightarrow A \cong C(\exists\Omega)$

(ii) (Wedderburn) A : 有限次元 $\Rightarrow A \cong \bigoplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(\mathbb{C})$

Thm. (GNS)

A : C^*-alg. $\Rightarrow$ $^\exists \mathcal{H}$: Hilbert sp. s.t. $A \subset B(\mathcal{H})$

Ex. $\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. $A = C(\mathbb{T})$ のとき.

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$ とすると. $A \subset B(\mathcal{H})$ とみれる.

とくに. $A \simeq \{ M_a \mid a \in C(\mathbb{T}) \}$. であるる.

$$\begin{array}{cccc} M_a : & L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & af \end{array}$$

§3. 合成作用素から生成されるC*環.

$\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$., $C_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$: bdd とする. このとき.

$MC_\varphi = C^*(M_a, C_\varphi \mid a \in C(\mathbb{T})) = C^*(M_z, C_\varphi)$

Prop. $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\varphi_\theta(z) = e^{-2\pi i \theta} z$. のとき. $MC_{\varphi_\theta} \simeq A_\theta$.

Def. $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

A_θ は 次の関係をみたす2つのユニタリ u, v で生成される universal C^*-alg. とする.

$uv = e^{2\pi i \theta} v \cdot u$

Proof of Prop.

$M_z C_{\varphi_\theta} = e^{2\pi i \theta} C_{\varphi_\theta} M_z$ の関係式から.

$\exists \Phi : A_\theta \longrightarrow MC_{\varphi_\theta}$: $*$-homo. onto.

$$\begin{array}{ccc} A_\theta & \longrightarrow & MC_{\varphi_\theta} \\ \cup & & \cup \\ u & \longmapsto & M_z \\ v & \longmapsto & C_{\varphi_\theta} \end{array}$$

Fact : A_θ は simple より $\ker \Phi = \{0\}$ $\Rightarrow$ Φ : $*$-iso.

Cor

$MC_{\varphi_\theta} \cong MC_{\varphi_\eta} \Leftrightarrow \theta \equiv \pm\eta \mod \mathbb{Z}$

Proof.

A_θ の K-theory. を使う.

Prop (Wattani - H.)

$p_n(z) = z^n$ のとき.

$MC_{p_n} \cong MC_{p_m} \Leftrightarrow n = m.$

Proof ($n \geq 2$ のとき) (outline)

Step 1 $MC_{p_n} \cong \mathcal{O}_{p_n}(J_{p_n})$

Step 2 $K_0(\mathcal{O}_{p_n}(J_{p_n})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$

Def. $|\lambda| = 1$, $|z_k| < 1$.

$$R(z) = \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} \cdot z}$$: 有限 Blaschke 積.

このとき. $\deg R = n$ とする.

Thm (H)

$\deg R \geq 2$ のとき.

MC_R : simple $\Leftrightarrow$ Julia set $J_R = \mathbb{T}$.

Thm (H.)

R_1, R_2 : finite Blaschke product $\deg R_i \geq 2$ のとき.

(i) $MC_{R_1} \simeq MC_{R_2} \Rightarrow \deg R_1 = \deg R_2$.

(ii) $\deg R_1 = \deg R_2$, $J_{R_1} = J_{R_2} = \mathbb{T} \Rightarrow MC_{R_1} \simeq MC_{R_2}$.

Ex. $P_2(z) = z^2$, $R_1(z) = \dfrac{2z^2-1}{2-z^2}$

$R_2(z) = \dfrac{2z^2+1}{2+z^2}$, $R_3(z) = \dfrac{3z^2+1}{3+z^2}$

$R_4(z) = \dfrac{(3+i)z^2+(1-i)}{(3-i)+(1+i)z^2}$ とすると.

$J_{P_2}, J_{R_1}, J_{R_3} = \mathbb{T}$, $J_{R_2}, J_{R_4} \neq \mathbb{T}$.

このとき.

$MC_{P_2} \simeq MC_{R_1} \simeq MC_{R_3}$.

$MC_{P_2} \not\simeq MC_{R_2}$, $MC_{P_2} \not\simeq MC_{R_4}$. は Thm からわかる.

$MC_{R_2} \overset{?}{\simeq} MC_{R_4}$ は未解決.

R : 次数2以上の有理関数.

J_R : R の Julia 集合.

μ^L : R の Lyubich 測度

$C_R : L^2(J_R, \mu^L) \longrightarrow L^2(J_R, \mu^L)$

Thm (H.)

$C^*(\{M_a \mid a \in C(J_R)\}, C_R) \simeq \mathcal{O}_R(J_R)$

Ex $R(z) = z^2 - 2$ などは少し計算されている.