

Low energy approximations of the Feynman path integral for Schrödinger evolution operators

宮西 吉久

大阪大学 基礎工学研究科

February 14, 2014

§1 Introduction and Motivation

- ・ 量子化の方法の比較
- (その 1) 正準量子化
- $$A, B \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

§1 Introduction and Motivation

- ・ 量子化の方法の比較

(その 1) 正準量子化

$$A, B \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \right) \quad \text{Poisson Bracket}$$

§1 Introduction and Motivation

・ 量子化の方法の比較

(その 1) 正準量子化

$$A, B \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \right) \quad \text{Poisson Bracket}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n)) \end{array}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}} \quad \text{正準量子化}$$

$$(\text{i.e. } \hat{x} = x, \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.)$$

§1 Introduction and Motivation

・ 量子化の方法の比較

(その 1) 正準量子化

$$A, B \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \right) \quad \text{Poisson Bracket}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n)) \end{array}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}} \quad \text{正準量子化}$$

$$(\text{i.e. } \hat{x} = x, \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.)$$

(その 2) Feynman 経路積分量子化 (まず大雑把に)

$$H(x, p) \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

$a(t, x, y)$: suitable symbol, $S(t, x, y)$: phase function defined by H .

§1 Introduction and Motivation

・ 量子化の方法の比較

(その 1) 正準量子化

$$A, B \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \right) \quad \text{Poisson Bracket}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n)) \end{array}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}} \quad \text{正準量子化}$$

$$(\text{i.e. } \hat{x} = x, \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.)$$

(その 2) Feynman 経路積分量子化 (まず大雑把に)

$$H(x, p) \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$$

$a(t, x, y)$: suitable symbol, $S(t, x, y)$: phase function defined by H .

$$U(t)f(x) \equiv \text{Os} \int_{\mathbf{R}^n} a(t, x, y) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(t, x, y)\right\} f(y) dy$$

§1 Introduction and Motivation

・量子化の方法の比較

(その1) 正準量子化

$$A, B \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$$

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \right) \quad \text{Poisson Bracket}$$

$$\Downarrow$$
$$\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}} \quad \text{正準量子化}$$

$$(\text{i.e. } \hat{x} = x, \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.)$$

(その2) Feynman 経路積分量子化 (まず大雑把に)

$$H(x, p) \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$$

$a(t, x, y)$: suitable symbol, $S(t, x, y)$: phase function defined by H .

$$U(t)f(x) \equiv \text{Os} \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x, y) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(t, x, y)\right\} f(y) dy$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(\frac{t}{N})]^N = \exp\left(\frac{-it}{\hbar} \hat{H}\right) ?$$

正準量子化と経路積分量子化

(Case 1) $M = \mathbf{R}^n$, $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x) \in C^\infty(T^*M)$

古典力学	正準量子化	経路積分量子化
$V(x) = O(x ^2) + \text{error.}$ (Fujiiwara theory)	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x)$	$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(\frac{t}{N})]^N$ $= \exp\left(\frac{-it}{\hbar} \hat{H}\right)$
$V(x) = C x ^n$ ($C > 0$, $n \geq 4$)	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x)$	$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(\frac{t}{N})]^N$ $= \exp\left(\frac{-it}{\hbar} \hat{H}\right) ?$

(Case 2) $M = S^2$, $H(x, p) = \frac{1}{2}g_{st}(p, p) = \frac{1}{2}g_{ij}p_i p_j$ (on local charts)

古典力学	幾何学の量子化	経路積分量子化
geodesic flow (various speeds)	prequantization exists real polarization fails! $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}(\Delta + \frac{1}{8}) ?$	$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(\frac{t}{N})]^N$ $=$ $\exp[\frac{-it}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2}(\Delta + \frac{R}{6})\right)] ?$

Here $\Delta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i})$ and $R = 2$ (scalar curvature).

古典力学とシュレディンガー発展作用素の積分核

(Case 1) $M = \mathbf{R}^n$, $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x) \in C^\infty(T^*M)$

$$e^{\frac{-it}{\hbar} \hat{H}} f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(t, x, y) f(y) dy.$$

古典力学	古典力学の軌道	積分核
$V(x) = O(x ^2) + \text{error.}$	time locally global diffeo on config. space	$K(t, x, y)$ $\in C^\infty((0, t) \times \mathbf{R}^{2n})$
$V(x) = C x ^n$ ($C > 0$, $n \geq 4$)	infinite many small periodic curves	if $n = 1$, $K(t, x, y)$ is nowhere C^1

(Case 2) $M = \mathbf{S}^2$, $H(x, p) = \frac{1}{2}g_{st}(p, p) = \frac{1}{2}g_{ij}p_i p_j$ (on local charts)

$$e^{\frac{-it}{\hbar} (-\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \beta R)} f(x) = \int_{\mathbf{S}^2} K(t, x, y) f(y) dy. \quad (\beta \text{ は定数})$$

古典力学	古典力学の軌道	積分核
geodesic flow (various speeds)	infinite many small periodic curves	$K(t, x, y)$ is distribution.

導入のまとめ (その1)

- ・ 色々な量子化の導入がある
(他にも, deformation quantization など).

導入のまとめ (その1)

- ・ 色々な量子化の導入がある
(他にも, deformation quantization など).
- ・ 幾何学的量子化の場合、 $L^2(M)$ 上の線形作用素で表現するための real polarization が取れないこともある.

導入のまとめ (その1)

- ・ 色々な量子化の導入がある
(他にも, deformation quantization など).
- ・ 幾何学的量子化の場合、 $L^2(M)$ 上の線形作用素で表現するための real polarization が取れないこともある.
- ・ 量子化された作用素は、定義によって違うかも知れない.

導入のまとめ (その1)

- ・ 色々な量子化の導入がある
(他にも, deformation quantization など).
- ・ 幾何学的量子化の場合、 $L^2(M)$ 上の線形作用素で表現するための real polarization が取れないこともある.
- ・ 量子化された作用素は、定義によって違うかも知れない.
(スペクトル幾何で特別な意味のある作用素は、 $\Delta + \beta R$)
 - ・ $\beta = 0$ (良く調べられている)
 - ・ $\beta = 1/6$ (geometry of spectrum clustering)
 - ・ 前量子化の幾何

導入のまとめ (その2)

- ・ 古典力学に於いて, いくらでも短い周期解があるときがある.

導入のまとめ (その2)

- ・ 古典力学に依じて, いくらでも短い周期解があるときがある.
- ・ コンパクトな多様体や高次 (4 次以上) のポテンシャルを考えると, 積分核が特異になる.

導入のまとめ (その2)

- ・ 古典力学に依じて, いくらでも短い周期解があるときがある.
- ・ コンパクトな多様体や高次 (4 次以上) のポテンシャルを考えると, 積分核が特異になる.

(問題解決のヒント)

積分核 $K(t, x, y)$ を $\hat{H}$ の L^2 正規化された固有関数 $\{u_j(x)\}$ を使って書いてみると,

$$K(t, x, y) = \sum_j e^{\frac{-itE_j}{\hbar}} u_j(x) \overline{u_j(y)}.$$

導入のまとめ (その2)

- ・ 古典力学に依じて、いくらでも短い周期解があるときがある.
- ・ コンパクトな多様体や高次 (4 次以上) のポテンシャルを考えると、積分核が特異になる.

(問題解決のヒント)

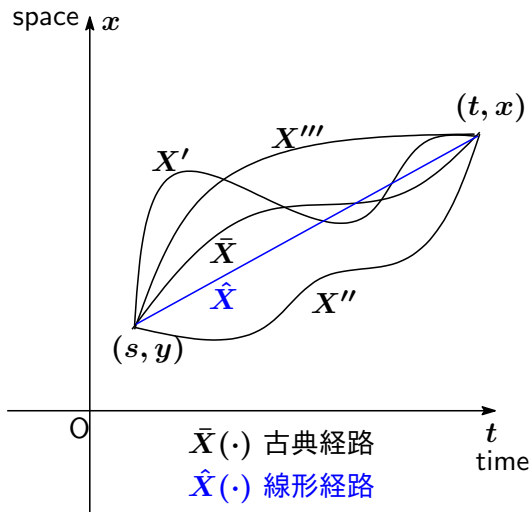
積分核 $K(t, x, y)$ を $\hat{H}$ の L^2 正規化された固有関数 $\{u_j(x)\}$ を使って書いてみると,

$$K(t, x, y) = \sum_j e^{\frac{-itE_j}{\hbar}} u_j(x) \overline{u_j(y)}.$$

もし j の有限部分和だけとれば, $K_{\text{finite}}(t, x, y) \in C^\infty$.

(**低エネルギー**に近い関数に対し、経路積分 (無限積) が計算できるかも知れない.)

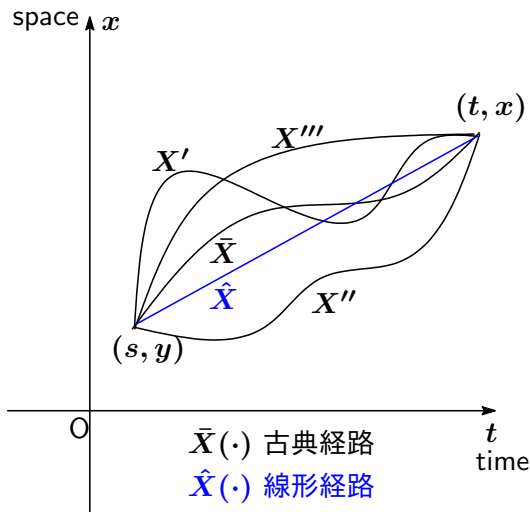
§2 Feynman 経路積分



作用積分

$$S(s, t, x, y) = \int_s^t \left[\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau)) \right] d\tau$$

§2 Feynman 経路積分



作用積分

$$S(s, t, x, y)$$

$$= \int_s^t \left[\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau)) \right] d\tau$$

経路積分とは、経路の和を
足し合わせることに

$$\int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(0, t, x, y)} f(y) \mathcal{D}[X]$$

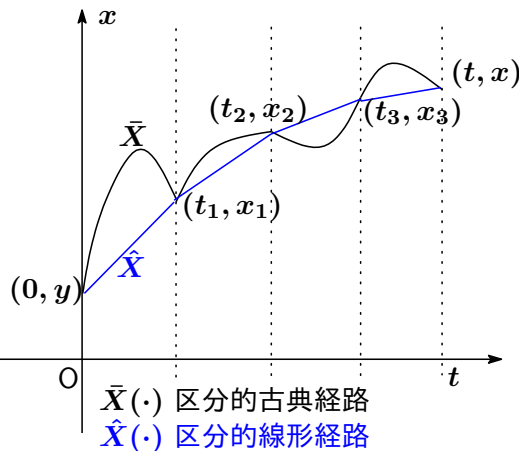
$$= e^{\frac{-it}{\hbar} \hat{H}} f(x)$$

Ω は、 $(0, y)$ と (t, x) を結ぶ
経路 X 全体の集合.

$\mathcal{D}[X]$ は Ω 上の Lebesgue-like
な測度.

問題点 ファインマン経路積分で導入される cylinder sets 上の集合関数は
可算加法族をもつ複素測度に拡張できない (Cameron)

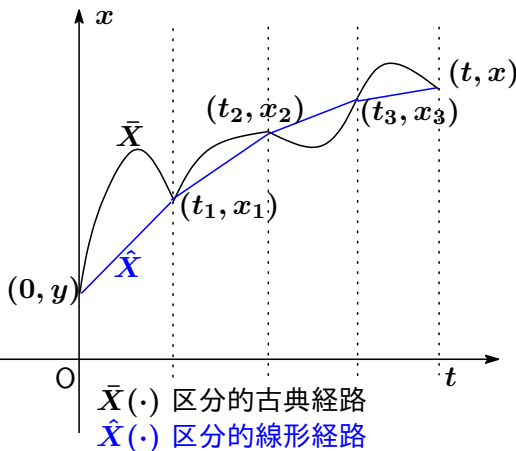
時間分割近似法 (今回採用する方法)



時間分割して, 作用積分を考える. 区分的古典経路, **区分的線形経路** (左図)などで積分する (色々な流儀)

経路の密度 a も必要に応じ考えて (色々な流儀).

時間分割近似法 (今回採用する方法)

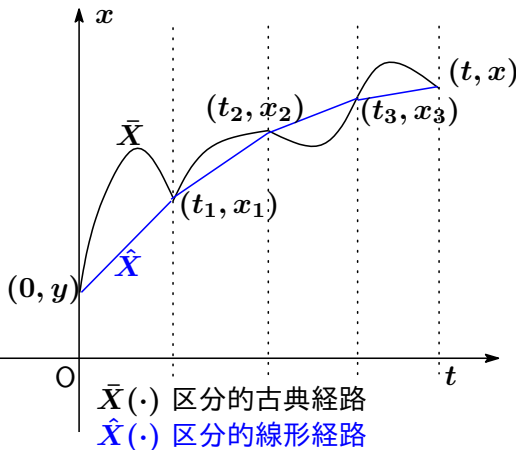


時間分割して, 作用積分を考える. 区分的古典経路, **区分的線形経路** (左図) などで積分する (色々な流儀)

経路の密度 a も必要に応じ考えて (色々な流儀).

$$\int_M a(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1}) e^{\frac{i}{\hbar} S(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1})} f(x_j) dx_j \\ = U(t_{j+1} - t_j) f(x_{j+1}) \\ (\text{small time evolution op.})$$

時間分割近似法 (今回採用する方法)



時間分割して、作用積分を考える。区分的古典経路、**区分的線形経路** (左図) などで積分する (色々な流儀)

経路の密度 a も必要に応じ考えて (色々な流儀).

$$\int_M a(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1}) e^{\frac{i}{\hbar} S(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1})} f(x_j) dx_j = U(t_{j+1} - t_j) f(x_{j+1})$$

(small time evolution op.)
 を用いて、**時間分割近似** を次のように定義する

$$\begin{aligned} & \int_M \cdots \int_M \prod_{j=0}^{N-1} a(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1}) e^{\frac{i}{\hbar} S(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1})} f(y) \prod_{j=0}^{N-1} dx_j \\ &= \left[\prod_{j=0}^{N-1} U(t_{j+1} - t_j) \right] f(x) \rightarrow \int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(0, t, x, y)} f(y) \mathcal{D}[X] \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

経路積分を定義する他の方法

経路積分を数学的に厳密に扱うための、いくつかの手段

1. Trotter Kato の公式を、ファインマン積分の数学的正当化とみなす方法
2. プランク定数 $\hbar$ あるいは質量または時間を複素数とし、Wiener 測度を構成し解析接続する方法
3. ヒルベルト空間の新しい広義積分と考える方法
(伊藤清の方法や Albeverio らの方法など)
4. 超準解析を用いて、ディラック作用素に対する*測度における光速 c を無限大数に取る方法
などなど

経路積分を定義する他の方法

経路積分を数学的に厳密に扱うための、いくつかの手段

1. Trotter Kato の公式を、ファインマン積分の数学的正当化とみなす方法
2. プランク定数 $\hbar$ あるいは質量または時間を複素数とし、Wiener 測度を構成し解析接続する方法
3. ヒルベルト空間の新しい広義積分と考える方法
(伊藤清の方法や Albeverio らの方法など)
4. 超準解析を用いて、ディラック作用素に対する*測度における光速 c を無限大数に取る方法
などなど

今回、時間分割近似を選んだ理由

他の方法は、作用積分の役割から多様体の曲率を導出できそうにない？

藤原先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

藤原先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ古典経路の作用積分が局所時間で定義される)

藤原先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ古典経路の作用積分が局所時間で定義される)

2. $D(t, x, y) = \det(\partial^2 S(t, x, y) / \partial x \partial y)$ (van Vleck determinant)
に対し,

$$a(t, x, y) = (2\pi i h)^{-n/2} D(t, x, y)^{1/2} \text{ とおく.}$$

藤原先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ古典経路の作用積分が局所時間で定義される)

2. $D(t, x, y) = \det(\partial^2 S(t, x, y) / \partial x \partial y)$ (van Vleck determinant)
に対し,

$$a(t, x, y) = (2\pi i \hbar)^{-n/2} D(t, x, y)^{1/2} \text{ とおく.}$$

3. $U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x, y) e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x, y)} f(y) dy$ と定義する.

藤原先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ古典経路の作用積分が局所時間で定義される)

2. $D(t, x, y) = \det(\partial^2 S(t, x, y) / \partial x \partial y)$ (van Vleck determinant)
に対し,

$$a(t, x, y) = (2\pi i \hbar)^{-n/2} D(t, x, y)^{1/2} \text{ とおく.}$$

3. $U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x, y) e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x, y)} f(y) dy$ と定義する.

Theorem (Fujiwara)

$t > 0$ をとる.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(\frac{t}{N})]^N = \exp \frac{-it}{\hbar} [-\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V(x)] \quad (\text{作用素ノルム})$$

一ノ瀬弥先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

一ノ瀬弥先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ区分的線形経路の作用積分)

一ノ瀬弥先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ区分的線形経路の作用積分)

2. $a(t, x, y) = (2\pi i h)^{-n/2}$ とおく.

一ノ瀬弥先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ区分的線形経路の作用積分)

2. $a(t, x, y) = (2\pi i h)^{-n/2}$ とおく.

3. $U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x, y) e^{\frac{i}{h} S(t, x, y)} f(y) dy$ と定義する.

一ノ瀬弥先生の結果

Assumption $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\partial^\alpha V(x)| < C_\alpha$ for $|\alpha| \geq 2$.

1. $S(t, x, y) = \int_0^t [\frac{1}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))] d\tau$

((0, y) と (t, x) を結ぶ区分的線形経路の作用積分)

2. $a(t, x, y) = (2\pi i h)^{-n/2}$ とおく.

3. $U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x, y) e^{\frac{i}{h} S(t, x, y)} f(y) dy$ と定義する.

Theorem (W.Ichinose)

$t > 0$ をとる.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(\frac{t}{N})]^N f(x) = \exp \frac{-it}{h} [-\frac{h^2}{2} \Delta + V(x)] f(x) \quad (L^2\text{-strong})$$

いくつかの注意

1. van Vleck determinant $D(t, x, y)$ は, 連続の方程式を満たす.
$$\frac{\partial}{\partial t} D + \nabla \cdot [D \nabla S] = 0.$$

いくつかの注意

1. van Vleck determinant $D(t, x, y)$ は, 連続の方程式を満たす.
$$\frac{\partial}{\partial t} D + \nabla \cdot [D \nabla S] = 0.$$
2. $S(t, x, y)$ と $a(t, x, y)$ の取り方に, 多少の ambiguity がある.

いくつかの注意

1. van Vleck determinant $D(t, x, y)$ は, 連続の方程式を満たす.
$$\frac{\partial}{\partial t} D + \nabla \cdot [D \nabla S] = 0.$$
2. $S(t, x, y)$ と $a(t, x, y)$ の取り方に, 多少の ambiguity がある.
3. 証明は, $U(t)$ の大域的 L^2 有界性を用いる.
(Cotlar Stein lemma, Calderon-Vaillancourt theorem,
Hadamard's global inverse function theorem の利用)

いくつかの注意

1. van Vleck determinant $D(t, x, y)$ は, 連続の方程式を満たす.
$$\frac{\partial}{\partial t} D + \nabla \cdot [D \nabla S] = 0.$$
2. $S(t, x, y)$ と $a(t, x, y)$ の取り方に, 多少の ambiguity がある.
3. 証明は, $U(t)$ の大域的 L^2 有界性を用いる.
(Cotlar Stein lemma, Calderon-Vaillancourt theorem,
Hadamard's global inverse function theorem の利用)

$$\forall \epsilon > 0, \exists T > 0 \text{ s.t. } 0 < t < T \Rightarrow$$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \dots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{\hbar} \hat{H} f\|_{L^2} < \epsilon t \|f\|_{L^2} \quad \dots (2)$$

いくつかの注意

1. van Vleck determinant $D(t, x, y)$ は, 連続の方程式を満たす.
$$\frac{\partial}{\partial t} D + \nabla \cdot [D \nabla S] = 0.$$
2. $S(t, x, y)$ と $a(t, x, y)$ の取り方に, 多少の ambiguity がある.
3. 証明は, $U(t)$ の大域的 L^2 有界性を用いる.
(Cotlar Stein lemma, Calderon-Vaillancourt theorem,
Hadamard's global inverse function theorem の利用)

$$\forall \epsilon > 0, \exists T > 0 \text{ s.t. } 0 < t < T \Rightarrow$$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \dots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{\hbar} \hat{H} f\|_{L^2} < \epsilon t \|f\|_{L^2} \quad \dots (2)$$

球面上や高次ポテンシャルに対しても, (1), (2) に対応する評価を考えたい.

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

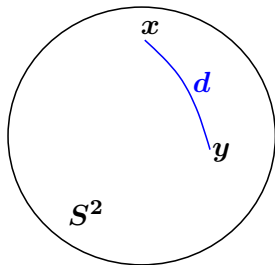
Setting

1. $(M, g) = (S^2, g_{st})$ $(\mathbf{R}^3$ 内の 2 次元単位球面)

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting

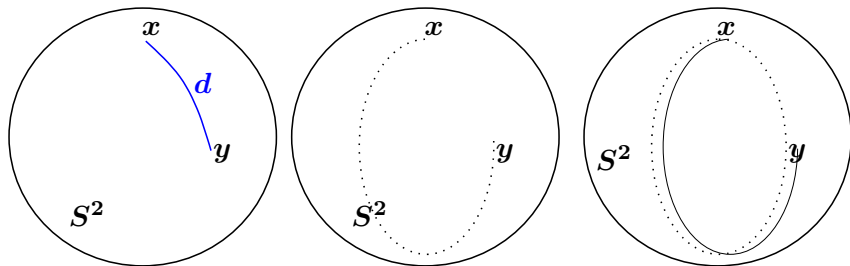
1. $(M, g) = (S^2, g_{st})$ ($\mathbf{R}^3$ 内の 2 次元単位球面)
2. $d = d(x, y) = \arccos(\vec{x} \cdot \vec{y})$ (測地距離)



§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting

1. $(M, g) = (S^2, g_{st})$ ($\mathbf{R}^3$ 内の 2 次元単位球面)
2. $d = d(x, y) = \arccos(\vec{x} \cdot \vec{y})$ (測地距離)



($d \geq \pi$ となる距離 d は考えない)

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$$3. \quad S(t, x, y) = \int_0^t \frac{1}{2} g_{x(t)}(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) dt = \frac{|d(x, y)|^2}{2t}$$

(最短距離の作用積分)

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

3. $S(t, x, y) = \int_0^t \frac{1}{2} g_{x(t)}(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) dt = \frac{|d(x, y)|^2}{2t}$
(最短距離の作用積分)

4. 多様体の van Vleck determinant

$$D(t, x, y) = G^{-1/2}(x) G^{-1/2}(y) \det(\partial^2 S(t, x, y) / \partial x \partial y)$$

$\chi(d(x, y))$: cut off

(bump ft. with compact support contained in $d(x, y) < \pi$.)

$$a(t, x, y) = \chi(d(x, y)) D(t, x, y)^{1/2}$$

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

3. $S(t, x, y) = \int_0^t \frac{1}{2} g_{x(t)}(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) dt = \frac{|d(x, y)|^2}{2t}$
(最短距離の作用積分)

4. 多様体の van Vleck determinant

$$D(t, x, y) = G^{-1/2}(x) G^{-1/2}(y) \det(\partial^2 S(t, x, y) / \partial x \partial y)$$

$\chi(d(x, y))$: cut off

(bump ft. with compact support contained in $d(x, y) < \pi$.)

$$a(t, x, y) = \chi(d(x, y)) D(t, x, y)^{1/2}$$

Definition (Shortest path approximations on S^2)

$$U(t)f(x) \equiv (2\pi i)^{-1} \int_{S^2} a(t, x, y) e^{iS(t, x, y)} f(y) dy$$

(注意. 以下, 簡単のために $\hbar = 1$ とする.)

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$-\Delta_{S^2} = \int_{\mathbf{R}} E d\rho(E)$: 球面ラプラシアンの特値分解

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$-\Delta_{S^2} = \int_{\mathbf{R}} E d\rho(E)$: 球面ラプラシアンの特値分解

注意.

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$-\Delta_{S^2} = \int_{\mathbf{R}} E d\rho(E)$: 球面ラプラシアンの特値分解

注意.

$\{u_j, E_j\}$: 球面ラプラシアンの固有関数展開

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$-\Delta_{S^2} = \int_{\mathbf{R}} E d\rho(E)$: 球面ラプラシアンの特値分解

注意.

$\{u_j, E_j\}$: 球面ラプラシアンの固有関数展開

($\{u_j\}$ は $L^2(S^2)$ の正規直交基底, E_j は固有値)

§3 球面上の経路積分 (最短経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$-\Delta_{S^2} = \int_{\mathbf{R}} E d\rho(E)$: 球面ラプラシアンの特値分解

注意.

$\{u_j, E_j\}$: 球面ラプラシアンの固有関数展開

($\{u_j\}$ は $L^2(S^2)$ の正規直交基底, E_j は固有値)

$\rho(E) : L^2(S^2) \rightarrow \text{L.h.}\{u_j \mid E_j \leq E\}$: spectral projector
(低エネルギーへの射影)

§3 球面上の経路積分 結果 (その1)

Theorem (operator norm)

$t > 0$. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N \rho(N^{1/3-\varepsilon}) = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] \text{ in } L^2$$

§3 球面上の経路積分 結果 (その1)

Theorem (operator norm)

$t > 0$. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N \rho(N^{1/3-\varepsilon}) = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] \text{ in } L^2$$

Theorem (strong limits)

$t > 0$ に対し

$$s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N \rho(N) f(x) = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] f(x) \text{ in } L^2$$

§3 球面上の経路積分 結果 (その1)

Theorem (operator norm)

$t > 0$. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N \rho(N^{1/3-\varepsilon}) = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] \text{ in } L^2$$

Theorem (strong limits)

$t > 0$ に対し

$$s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N \rho(N) f(x) = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] f(x) \text{ in } L^2$$

Corollary

u_j をラプラシアン固有関数とし, $t > 0$ とする.

$$s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N u_j = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] u_j \text{ in } L^2$$

§3 球面上の経路積分 結果

注意 1.

$t > 0$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|[U(t/N)]^N - \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right]\|_{L^2} \neq 0.$$

(spectral projector なしで, operator norm の収束は成立しない)

§3 球面上の経路積分 結果

注意 1.

$t > 0$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| [U(t/N)]^N - \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] \|_{L^2} \neq 0.$$

(spectral projector なしで, operator norm の収束は成立しない)

注意 2.

$f(x) \in G_{1/6}(S^2)$ (Gevrey class) とする. $t > 0$ に対し

$$s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N)]^N f(x) = \exp \left[-it \left(-\frac{1}{2}(\Delta + \frac{R}{6}) \right) \right] f(x) \text{ in } L^2.$$

(低エネルギー関数に対しては, 収束する)

直観的には、最短経路近似は高エネルギーの関数が逃げてしまう.

§3 球面上の経路積分 色々

他の方法で求められる積分核と等号で結んでみる.

$f(x) \in C^\infty(S^2)$ とし, $t = \frac{8\pi m}{k} \in \mathbb{Q}$ (k と m を互いに素とする.)

§3 球面上の経路積分 色々

他の方法で求められる積分核と等号で結んでみる.

$f(x) \in C^\infty(S^2)$ とし, $t = \frac{8\pi m}{k} \in \mathbf{Q}$ (k と m を互いに素とする.)

$$\begin{aligned} & s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \{U(8\pi m/kN)\}^N \rho(N) f(x) \\ &= \int_{S^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) e^{-4\pi i \{3ml(l+1)+1\}/3k} C_l^{1/2}(\cos d(x, y)) f(y) dy \\ &= \left\{ e^{2\pi i m/3k} \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma(m, k, j) \cos \frac{2\pi j}{k} A \right\} f(x) \end{aligned}$$

§3 球面上の経路積分 色々

他の方法で求められる積分核と等号で結んでみる.

$f(x) \in C^\infty(S^2)$ とし, $t = \frac{8\pi m}{k} \in \mathbb{Q}$ (k と m を互いに素とする.)

$$\begin{aligned} & s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \{U(8\pi m/kN)\}^N \rho(N) f(x) \\ &= \int_{S^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) e^{-4\pi i \{3ml(l+1)+1\}/3k} C_l^{1/2}(\cos d(x, y)) f(y) dy \\ &= \left\{ e^{2\pi i m/3k} \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma(m, k, j) \cos \frac{2\pi j}{k} A \right\} f(x) \end{aligned}$$

ただし, $\Gamma(m, k, j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{2k-1} e^{\pi i (l^2 m + l j)/k}$ は Gauss 和,

$$A = \sqrt{-\Delta + \frac{1}{4}},$$

C_l : Gegenbauer polynomials are defined by

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{1/2}(x) t^l.$$

§3 色々と

Shell game (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\int_{\Omega} e^{iS(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X] \\ \sim \frac{1}{2\pi i t} \exp\left(iS(0,t,x,x) + \frac{iRt}{12}\right) \sim \sum_{\substack{l=0,1,\dots \\ -l \leq m \leq l}} e^{-it \frac{l(l+1)}{2}} |Y_{l,m}(x)|^2.$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の実部を計算.

§3 色々と

Shell game (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\int_{\Omega} e^{iS(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X] \\ \sim \frac{1}{2\pi it} \exp\left(iS(0,t,x,x) + \frac{iRt}{12}\right) \sim \sum_{\substack{l=0,1,\dots \\ -l \leq m \leq l}} e^{-it \frac{l(l+1)}{2}} |Y_{l,m}(x)|^2.$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の実部を計算.

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi it} \int_{S^2} \exp\left(\frac{iRt}{12}\right) dx\right] \sim \operatorname{Re} \sum_{\substack{l=0,1,\dots \\ -l \leq m \leq l}} e^{-it \frac{l(l+1)}{2}}$$

§3 色々と

Shell game (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} e^{iS(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X] \\ & \sim \frac{1}{2\pi it} \exp(iS(0,t,x,x) + \frac{iRt}{12}) \sim \sum_{\substack{l=0,1,\dots \\ -l \leq m \leq l}} e^{-it \frac{l(l+1)}{2}} |Y_{l,m}(x)|^2. \end{aligned}$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の実部を計算.

$$\operatorname{Re}[\frac{1}{2\pi it} \int_{S^2} \exp(\frac{iRt}{12}) dx] \sim \operatorname{Re} \sum_{\substack{l=0,1,\dots \\ -l \leq m \leq l}} e^{-it \frac{l(l+1)}{2}}$$

$t \rightarrow 0$ とし, $\zeta(x)$ をリーマンゼータ関数とすると,

$$\begin{aligned} \int_{S^2} (\frac{R}{24\pi}) dx &= 1 + \sum_{l=1,2,\dots} (2l+1) \\ &= 1 + 2\zeta(-1) + \zeta(0) \\ &= 1 + 2(\frac{-1}{12}) + (\frac{-1}{2}) = \frac{1}{3} \text{ (correct)} \end{aligned}$$

§3 色々 (私の知りたい事)

続き (一般の 2 次元多様体, $\hbar$ -small) (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X] \\ \sim \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x) + \frac{i\hbar R t}{12}\right) \sim \sum_{j=1,\dots} e^{\frac{-itE_j}{\hbar}} |u_j(x)|^2.$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の時間積分 ($t_1 \leq t \leq t_2$) を計算.

§3 色々 (私の知りたい事)

続き (一般の 2 次元多様体, $\hbar$ -small) (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X]$$

$$\sim \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x) + \frac{i \hbar R t}{12}\right) \sim \sum_{j=1,\dots} e^{\frac{-i t E_j}{\hbar}} |u_j(x)|^2.$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の時間積分 ($t_1 \leq t \leq t_2$) を計算.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_M \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i \hbar R t}{12}\right) dx \, dt \sim \sum_{j=1,\dots} \frac{i \hbar}{E_j} e^{\frac{-i(t_2-t_1)E_j}{\hbar}}$$

§3 色々 (私の知りたい事)

続き (一般の 2 次元多様体, $\hbar$ -small) (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X] \\ \sim \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x) + \frac{i \hbar R t}{12}\right) \sim \sum_{j=1,\dots} e^{\frac{-i t E_j}{\hbar}} |u_j(x)|^2.$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の時間積分 ($t_1 \leq t \leq t_2$) を計算.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_M \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i \hbar R t}{12}\right) dx dt \sim \sum_{j=1,\dots} \frac{i \hbar}{E_j} e^{\frac{-i(t_2-t_1)E_j}{\hbar}}$$



$$\sim \sum_{\gamma: \text{closed geodesic}} \hbar e^{i S_{\gamma}/\hbar} \frac{c_{\gamma} e^{\frac{\pi i m \gamma}{4}}}{\sqrt{\det(I - P_{\gamma})}} ?$$

§3 色々 (私の知りたい事)

続き (一般の 2 次元多様体, $\hbar$ -small) (not rigorous!).

For small $t > 0$,

$$\int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x)} \mathcal{D}[X] \\ \sim \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(0,t,x,x) + \frac{i \hbar R t}{12}\right) \sim \sum_{j=1,\dots} e^{\frac{-i t E_j}{\hbar}} |u_j(x)|^2.$$

$S(0,t,x,x) = 0$ とし, trace の時間積分 ($t_1 \leq t \leq t_2$) を計算.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_M \frac{1}{2\pi i \hbar t} \exp\left(\frac{i \hbar R t}{12}\right) dx dt \sim \sum_{j=1,\dots} \frac{i \hbar}{E_j} e^{\frac{-i(t_2-t_1)E_j}{\hbar}}$$



$$\sim \sum_{\gamma: \text{closed geodesic}} \hbar e^{i S_{\gamma}/\hbar} \frac{c_{\gamma} e^{\frac{\pi i m \gamma}{4}}}{\sqrt{\det(I - P_{\gamma})}} ?$$

(Low energy, time local) Gutzwiller trace formula can be found in [Gu-St] (§11.5.3. p.301)

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting(1次元 高次ポテンシャル)

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

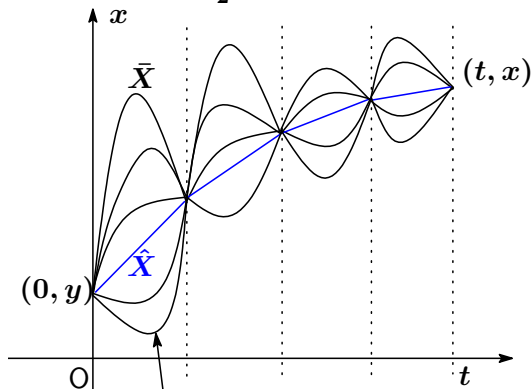
Setting(1次元 高次ポテンシャル)

1. $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + c|x|^n \in C^\infty(T^*\mathbf{R}), \quad (c > 0, n \geq 4).$

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting(1次元 高次ポテンシャル)

1. $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + c|x|^n \in C^\infty(T^*\mathbf{R}), \quad (c > 0, n \geq 4).$



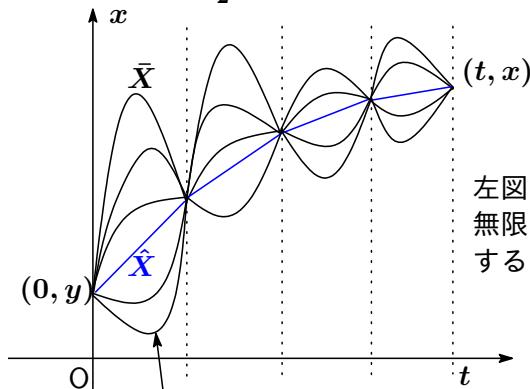
$\bar{X}(\cdot)$ 区分的古典経路が可算無限ある

$\hat{X}(\cdot)$ 区分的線形経路

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting(1次元 高次ポテンシャル)

1. $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + c|x|^n \in C^\infty(T^*\mathbf{R}), \quad (c > 0, n \geq 4).$



左図のように、微小時間ごとに無限に多くの古典経路が存在する。

$\bar{X}(\cdot)$ 区分的古典経路が可算無限ある

$\hat{X}(\cdot)$ 区分的線形経路

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$$\begin{aligned} 2. \ S(t, x, y) &= \int_0^t L(\hat{X}(s), \dot{\hat{X}}(s)) ds \\ &= \frac{(y-x)^2}{2t} - \frac{ct}{n+1} \left(\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x} \right) \quad (\text{線形経路の作用積分}) \end{aligned}$$

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

$$\begin{aligned} 2. S(t, x, y) &= \int_0^t L(\hat{X}(s), \dot{\hat{X}}(s)) ds \\ &= \frac{(y-x)^2}{2t} - \frac{ct}{n+1} \left(\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x} \right) \quad (\text{線形経路の作用積分}) \end{aligned}$$

Lemma (one path condition)

Let $C_0 < 2\sqrt{2}$ and $t > 0$. Then the classical motion satisfying $|\dot{\hat{X}}(s)|t|^{2/(n-2)} < C_0$ for all $0 \leq s \leq t$ is one at most.

3. van Vleck determinant

$$D(t, x, y) = \partial^2 S(t, x, y) / \partial x \partial y$$

$$\chi_t(x, y) \equiv \chi(t^{2/(n-2)}x, t^{2/(n-2)}y) : \text{cut off}$$

(bump ft. with compact support contained in $|x| < C_1, |y| < C_1$.)

$$a(t, x, y) = \chi_t(x, y) D(t, x, y)^{1/2}$$

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (最短線形経路と低エネルギー近似)

Setting のつづき

Definition (Shortest path approximations)

$$U(t)f(x) \equiv (2\pi i)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{iS(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

球面のときと同じようにスペクトル分解を考える.

$$-\frac{1}{2}\Delta + c|x|^n = \int_{\mathbf{R}} E d\rho(E) : \text{スペクトル分解}$$

Zanelli の h-small calculus の記号にならって,

Definition (Low energy shortest path approximations)

$$U(t, E) \equiv \rho(E)U(t)$$

(低エネルギーへの射影)

§4 高次ポテンシャルに対する経路積分 (結果)

Theorem (Time slicing products and the strong limits)

Let $E_N = o(N^{n/2n-2})$ and $E_N \rightarrow \infty$ as $N \rightarrow \infty$. We have

$$s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} [U(t/N, E_N)]^N f(x) = e^{-it\hat{H}} f(x) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R})$$

注意. $n = 2$ なら, $\chi_t(x, y) \equiv \chi(t^{2/(n-2)}x, t^{2/(n-2)}y)$ は, 普通の振動積分の定義と思い直せる. さらに, $\rho(E)$ も必要ない.

注意. 区分的古典経路を使えば, もっと良い近似が得られるかも知れない.

§5.1 証明の概要

Case 1 ($M = \mathbf{R}^n$, $V(x) = O(x^2)$) を思い出す.

§5.1 証明の概要

Case 1 ($M = \mathbf{R}^n$, $V(x) = O(x^2)$) を思い出す.

$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ s.t. $0 < t < T \Rightarrow$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \dots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{h} \hat{H} f\|_{L^2} < \varepsilon t \quad \dots (2)$$

§5.1 証明の概要

Case 1 ($M = \mathbf{R}^n$, $V(x) = O(x^2)$) を思い出す.

$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ s.t. $0 < t < T \Rightarrow$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \dots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{h} \hat{H} f\|_{L^2} < \varepsilon t \quad \dots (2)$$

2次元球面上で, (1), (2) に対応する評価.

§5.1 証明の概要

Case 1 ($M = \mathbf{R}^n$, $V(x) = O(x^2)$) を思い出す.

$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ s.t. $0 < t < T \Rightarrow$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \dots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{h} \hat{H} f\|_{L^2} < \varepsilon t \quad \dots (2)$$

2次元球面上で, (1), (2) に対応する評価.

$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\Delta_{S^2} + \frac{R}{6})$ とすると,

§5.1 証明の概要

Case 1 ($M = \mathbf{R}^n$, $V(x) = O(x^2)$) を思い出す.

$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ s.t. $0 < t < T \Rightarrow$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \cdots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{h} \hat{H} f\|_{L^2} < \varepsilon t \quad \cdots (2)$$

2次元球面上で, (1), (2) に対応する評価.

$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\Delta_{S^2} + \frac{R}{6})$ とすると,

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + C_1 t)\|f\|_{L^2} + C_2 t^2 \|(-\Delta_{S^2} + 1)f\|_{L^2} \quad \cdots (3)$$

$$\|U(t)f - \exp(-it\hat{H})f\|_{L^2} \leq \frac{C_3 t^2}{2} \|(-\Delta_{S^2} + 1)^3 f\|_{L^2} \quad \cdots (4)$$

§5.1 証明の概要

Case 1 ($M = \mathbf{R}^n$, $V(x) = O(x^2)$) を思い出す.

$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ s.t. $0 < t < T \Rightarrow$

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|f\|_{L^2} \quad \cdots (1)$$

$$\|U(t)f - \exp \frac{-it}{h} \hat{H} f\|_{L^2} < \varepsilon t \quad \cdots (2)$$

2次元球面上で, (1), (2) に対応する評価.

$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\Delta_{S^2} + \frac{R}{6})$ とすると,

$$\|U(t)f\|_{L^2} \leq (1 + C_1 t)\|f\|_{L^2} + C_2 t^2 \|(-\Delta_{S^2} + 1)f\|_{L^2} \quad \cdots (3)$$

$$\|U(t)f - \exp(-it\hat{H})f\|_{L^2} \leq \frac{C_3 t^2}{2} \|(-\Delta_{S^2} + 1)^3 f\|_{L^2} \quad \cdots (4)$$

Super-quadratic potential に対する評価.

$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x)$ とすると,

$$\|[U(t, E) - e^{\frac{-it\hat{H}}{h}}]\rho(E)\|_{L^2} \leq \frac{Ct^2}{2}(E^{2-2/n} + 1)\|f(x)\|_{L^2} \quad \cdots (5)$$