量子力学セミナーのセミナー録

目次

1　Hilbert 空間

この節では, 量子力学を数学的に扱うための基本事項について述べる. なお, この節の内容については新井朝雄先生の著書 [3] を参照している.

1.1　Hilbert 空間の定義

この小節では, Hilbert 空間の定義と基本事項を思い出すことから始める. そのために, 内積空間を定義から述べる.

Definition 1.1.1 (内積空間)**.** $\mathscr{H}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする ($\mathscr{H}$ の零ベクトルを $0_{\mathscr{H}}$ と表す). このとき, 関数

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}\colon \mathscr{H}\times\mathscr{H}\ni(\Psi,\Phi)\mapsto\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}\in\mathbb{C}$$

が以下の性質 (H.1)–(H.4) をみたすとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ を**内積** (inner product) といい, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ が定義されたベクトル空間 $\mathscr{H}$ を**内積空間** (inner product space) という.

(H.1) **正値性.** 任意の $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して, $\langle\Psi,\Psi\rangle_{\mathscr{H}}\geq 0$.
(H.2) **正定値性.** $\langle\Psi,\Psi\rangle_{\mathscr{H}}=0\Leftrightarrow\Psi=0_{\mathscr{H}}$.
(H.3) **線形性.** 任意の $\Psi,\Phi_1,\Phi_2\in\mathscr{H}$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\langle\Psi,\alpha\Phi_1+\beta\Phi_2\rangle_{\mathscr{H}}=\alpha\langle\Psi,\Phi_1\rangle_{\mathscr{H}}+\beta\langle\Psi,\Phi_2\rangle_{\mathscr{H}}.$$

(H.4) **対称性.** 任意の $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}$ に対して, $\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}=\overline{\langle\Phi,\Psi\rangle}_{\mathscr{H}}$.

Remark 1.1.1. 定義についてのいくつかの注意を述べておく.

(1) (H.3), (H.4) から, 任意の $\Psi_1,\Psi_2,\Phi\in\mathscr{H}$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\langle\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}=\overline{\alpha}\langle\Psi_1,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}+\overline{\beta}\langle\Psi_2,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}\tag{1.1}$$

が成り立つ. (1.1) 式を, 内積 $\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}$ の Ψ に関する**反線形性** (anti-linearity) という.

(2) 関数解析についての文献では, ほとんどの場合, 内積の線形性・反線形性を,

$$\langle\alpha\Phi_1+\beta\Phi_2,\Psi\rangle_{\mathscr{H}}=\alpha\langle\Phi_1,\Psi\rangle_{\mathscr{H}}+\beta\langle\Phi_2,\Psi\rangle_{\mathscr{H}},$$
$$\langle\Phi,\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2\rangle_{\mathscr{H}}=\overline{\alpha}\langle\Phi,\Psi_1\rangle_{\mathscr{H}}+\overline{\beta}\langle\Phi,\Psi_2\rangle_{\mathscr{H}}$$

で定義している ([34, p.76] や [12, p.28] などを参照) ので, 他の本を読む場合は注意されたい.

内積空間における重要な不等式を述べておく.

Theorem 1.1.1 (Schwarz の不等式)**.** $(\mathscr{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする. このとき, 任意の $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}$ に対して,

$$|\langle\Psi,\Phi\rangle|\leq\|\Psi\|\|\Phi\|$$

が成り立つ.

Schwarz の不等式から次の命題が成り立つ.

Proposition 1.1.1. $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする. このとき, 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi,\Psi\rangle_{\mathscr{H}}}$$

と定めると, $\|\cdot\|$ は $\mathscr{H}$ のノルムとなる, すなわち, 次の公理 (N.1)–(N.4) が成り立つ:

(N.1) 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して, $\|\Psi\| \geq 0$.
(N.2) $\|\Psi\| = 0 \Leftrightarrow \Psi = 0_{\mathscr{H}}$.
(N.3) 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\|\alpha\Psi\| = |\alpha|\|\Psi\|$.
(N.4) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して, $\|\Psi + \Phi\| \leq \|\Psi\| + \|\Phi\|$.

Remark 1.1.2. Proposition 1.1.1(N.4) から次の不等式をえる:

$$|\|\Psi\| - \|\Phi\|| \leq \|\Psi - \Phi\| \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.1 から次の命題をえる.

Proposition 1.1.2. $\mathscr{H}$ を内積空間とする. 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$d(\Psi,\Phi) := \|\Psi - \Phi\|$$

と定めると, d は $\mathscr{H}$ の距離となる, すなわち, 次の公理 (D.1)–(D.4) が成り立つ:

(D.1) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して, $\|\Psi - \Phi\| \geq 0$.
(D.2) $\|\Psi - \Phi\| = 0 \Leftrightarrow \Psi = \Phi$.
(D.3) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\|\Psi - \Phi\| = \|\Phi - \Psi\|$.
(D.4) 任意の $\Psi, \Phi, \Lambda \in \mathscr{H}$ に対して, $\|\Psi - \Phi\| \leq \|\Psi - \Lambda\| + \|\Lambda - \Phi\|$.

Proposition 1.1.2 から, 内積空間は距離空間となる. したがって, 内積空間には位相構造が導入される.

Definition 1.1.2 (強収束, 弱収束)**.** $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする.

(i) $\mathscr{H}$ の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ とベクトル Ψ が

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n - \Psi\| = 0$$

をみたすとき, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ψ に**収束する**または**強収束する**といい,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi, \quad \Psi_n \to \Psi \ (n \to \infty), \quad \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi$$

と書く. Ψ を $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) といい, 収束する点列を**収束列** (convergent sequence) という.

(ii) $\mathscr{H}$ の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ とベクトル Ψ が, 任意の $\Phi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \langle\Phi,\Psi_n\rangle = \langle\Phi,\Psi\rangle$$

をみたすとき, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ψ に**弱収束する**といい,

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi$$

と書く. Ψ を $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**弱極限**という.

Remark 1.1.3. 定義から, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ が $\Psi \in \mathscr{H}$ に強収束するならば, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ψ に弱収束する. $\mathscr{H}$ が無限次元の場合では, 逆は一般には成り立たない ([3, p.77, 例 2.15][*1]).

Definition 1.1.3 (有界列)**.** $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とし, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の点列とする. このとき,

$$\|\Psi_n\| \leq C \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

となる定数 $C \geq 0$ が存在するとき, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**有界列**という.

Remark 1.1.4. $\mathscr{H}$ を内積空間とする. このとき, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ が収束列ならば有界列である.

Proposition 1.1.1, Definition 1.1.2(i), (1.2) 式, Theorem 1.1.1 から次の命題をえる.

Proposition 1.1.3. $\mathscr{H}$ を内積空間とし, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$, $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) (和の連続性) $\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi,\ \lim_{n\to\infty} \Phi_n = \Phi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\Psi_n + \Phi_n) = \Psi + \Phi.$
(ii) (スカラー積の連続性) $\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi,\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi.$
(iii) (ノルムの連続性) $\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\Psi_n\| = \|\Psi\|.$
(iv) (内積の連続性) $\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi,\ \lim_{n\to\infty} \Phi_n = \Phi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle\Psi_n, \Phi_n\rangle = \langle\Psi, \Phi\rangle.$

Definition 1.1.4 (Cauchy 列)**.** $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする. このとき, $\mathscr{H}$ の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n - \Psi_m\| = 0$$

をみたすとき, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を **Cauchy 列**という.

Cauchy 列については次の命題が成り立つ ([3, p.21, 命題 1.12] 参照).

Proposition 1.1.4. $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする.

(i) 収束列は Cauchy 列である.
(ii) Cauchy 列は有界列である.

Remark 1.1.5. Proposition 1.1.4(i) の逆は一般には成り立たない ([3, p.22, 例 1.13] 参照).

Definition 1.1.5 (Hilbert 空間)**.** 内積空間の任意の Cauchy 列が収束列となるとき, 内積空間は**完備**であるという. 完備な内積空間を **Hilbert 空間** (Hilbert space) という.

Hilbert 空間の具体例については以下のようなものがある.

Example 1.1.1. $d \in \mathbb{N}$ とする.

$$\mathbb{C}^d := \{(z_1, \ldots, z_d) : z_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \ldots, d)\}$$

[*1] 後述する完全正規直交系を用いている.

と定める. 任意の $z=(z_1,\dots,z_d), w=(w_1,\dots,w_d)\in\mathbb{C}^d$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} z+w &= (z_1+w_1,\dots,z_d+w_d)\\ \alpha z &= (\alpha z_1,\dots,\alpha z_d)\\ \langle z,w\rangle_{\mathbb{C}} &= \sum_{i=1}^{d}\overline{z_i}w_i \end{aligned}$$

と定めると, $\mathbb{C}^d$ は d 次元複素 Hilbert 空間となる.

Example 1.1.2. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする.

$$\int_X |f|^2\,d\mu<\infty$$

をみたす X 上の複素数値可測関数からなる集合を $\mathcal{L}^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ とする. $f,g\in\mathcal{L}^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対して,

$$f\overset{\mu}{\sim}g \overset{\text{def}}{\iff} f=g\ a.e.\ \mu$$

と定めると, $\overset{\mu}{\sim}$ は同値関係となる.

$$L^2(X,\mathfrak{M},\mu)\coloneqq\mathcal{L}^2(X,\mathfrak{M},\mu)/\overset{\mu}{\sim}$$

と定める. $L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ は同値類からなる集合だが, 慣例にならって, $L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ の元 $[f]$ を単に f と表す. $f,g\in L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\coloneqq f(x)+g(x)\\ (\alpha f)(x) &\coloneqq \alpha f(x)\\ \langle f,g\rangle_{L^2(X,\mathfrak{M},\mu)} &\coloneqq \int_X \overline{f}g\,d\mu \end{aligned}$$

と定めると, $L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ は無限次元複素 Hilbert 空間となる.

Example 1.1.3.

$$\ell^2(\mathbb{N})\coloneqq\left\{\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}\,:\,\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty\right\}$$

と定める. $\alpha=\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty},\beta=\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^2(\mathbb{N})$, $\gamma\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &\coloneqq \{\alpha_n+\beta_n\}_{n=1}^{\infty}\\ \gamma\alpha &\coloneqq \{\gamma\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\\ \langle\alpha,\beta\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} &\coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha_n}\beta_n \end{aligned}$$

と定めると, $\ell^2(\mathbb{N})$ は無限次元複素 Hilbert 空間となる.

Remark 1.1.6. Example 1.1.3 は Example 1.1.2 の特別な場合である ([34, p.65] 参照).

Definition 1.1.6. $\mathscr{H}$ を内積空間とし, $\mathscr{D}$ を空でない $\mathscr{H}$ の部分集合とする.

(i)

$$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D},\ \Psi \in \mathscr{H},\ \ \lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \Rightarrow\ \ \Psi \in \mathscr{D}$$

が成り立つとき, $\mathscr{D}$ を**閉集合** (closed set) という. 特に, $\mathscr{D}$ が閉集合かつ部分空間の場合は**閉部分空間** (closed subspace) という.

(ii) $\mathscr{D}$ の補集合 $\mathscr{H} \setminus \mathscr{D}$ が閉集合となるとき, $\mathscr{D}$ を**開集合** (open set) という.

Hilbert 空間の部分空間について次の命題が成り立つ.

Proposition 1.1.5. $\mathscr{H}$ を Hilbert 空間とし, $\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分空間とする. このとき, 次は同値である.

(i) $\mathscr{D}$ は閉集合である.
(ii) $\mathscr{D}$ は Hilbert 空間である.

Definition 1.1.7 (Hilbert 空間の直和)**.** $\mathscr{H}_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ を Hilbert 空間とする.

(i) $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_N (2 \leq N < \infty)$ のベクトル空間としての直和

$$\bigoplus_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n \coloneqq \{(\Psi_1, \ldots, \Psi_N) : \Psi_n \in \mathscr{H}_n (n = 1, \ldots, N)\}$$

の任意の元 $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_N), \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$ に対して,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle \coloneqq \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}_n} \tag{1.3}$$

と定めると, (1.3) 式は $\oplus_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n$ の内積となる. さらに, この内積に関して $\oplus_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n$ は Hilbert 空間となる. この Hilbert 空間を $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_N$ の**直和** (direct sum) とよび, 便宜上, ベクトル空間の直和と同一の記号 $\oplus_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n$ で表す. 特に, $N = 2$ の場合は $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ と表す.

(ii)

$$\mathscr{H} \coloneqq \left\{ \Psi_n \in \mathscr{H}_n (n = 1, 2, 3, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} \|\Psi_n\|_{\mathscr{H}_n}^2 < \infty \right\}$$

とおく. このとき, $\mathscr{H}$ はベクトル空間となることがわかる. また, 任意の $\Psi = \{\Psi_n\}, \Phi = \{\Phi_n\} \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi_n, \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}_n} \tag{1.4}$$

と定めると, (1.4) 式は $\mathscr{H}$ の内積となる. さらに, この内積に関して $\mathscr{H}$ は Hilbert 空間となる. この Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ を $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3, \ldots$ の**無限直和** (infinite direct sum) とよび, $\oplus_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$ と書く[*2].

[*2] このセミナー録内では無限直和を用いた議論については触れないが, 例えば, **場の量子論** (quantum field theory) においては非常に重要な概念である. 詳細については [4, 5] を参照されたい.

1.2 完全正規直交系

Definition 1.2.1. $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする．$\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ が $\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathscr{H}} = 0$ をみたすとき, Ψ と Φ は**直交する**といい, $\Psi \perp \Phi$ と表す．$\mathscr{H}$ の部分集合 $\mathscr{D}, \mathscr{F}$ について, すべての $\Psi \in \mathscr{D}$, $\Phi \in \mathscr{F}$ が $\Psi \perp \Phi$ をみたすとき, $\mathscr{D}$ と $\mathscr{F}$ は直交するといい, $\mathscr{D} \perp \mathscr{F}$ と表す.

Definition 1.2.2. $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とすし, $\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分集合とする.

$$\mathscr{D}^{\perp} := \{\Psi \in \mathscr{H} \,:\, \forall\Phi \in \mathscr{D},\ \langle\Phi,\Psi\rangle_{\mathscr{H}} = 0\}$$

と定める．$\mathscr{D}^{\perp}$ を $\mathscr{D}$ の**直交補空間** (orthogonal complement) という.

次の補題は基本的な事実である ([3, p.15, 補題 1.5]).

Lemma 1.2.1 (Pythagoras の定理)**.** $\mathscr{H}$ を内積空間とし, $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ する．このとき, $\Psi \perp \Phi$ ならば,

$$\|\Psi + \Phi\|^2 = \|\Psi\|^2 + \|\Phi\|^2$$

が成り立つ.

Definition 1.2.3 (正規直交系)**.** $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$ を内積空間とする．$\{\Psi_j\}_{j\in J} \subset \mathscr{H}$ が

$$\langle\Psi_j, \Psi_i\rangle_{\mathscr{H}} = \delta_{ji}$$

をみたす (δ_{ji} は Kronecker のデルタ), すなわち, 各 Ψ_j が $\Psi_j \perp \Psi_i$ $(j \neq i)$ となるような単位ベクトルであるとき, $\{\Psi_j\}_{j\in J}$ を**正規直交系** (orthonormal system ; O.N.S. と略す) という.

$\mathscr{H}$ の部分集合 $\mathscr{D}$ に対して, L.h.$\mathscr{D}$ を $\mathscr{D}$ によって生成される部分空間とする, すなわち,

$$\mathrm{L.h.}\mathscr{D} := \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_j \,:\, N \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ \Phi_j \in \mathscr{D} \right\}$$

とする．次の命題は, 正規直交系に関する基本的な事実である ([3, p.15, 命題 1.4]).

Proposition 1.2.1. $\{\Psi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathscr{H}$ を O.S.N. とする (ただし, $N < \infty$). このとき, 任意の $\Psi \in \mathrm{L.h.}\{\Psi_n\}_{n=1}^{N}$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{N} \langle\Psi_n, \Psi\rangle \Psi_n$$

と一意的に表される.

Definition 1.2.4 (正射影)**.** $\mathscr{H}$ を内積空間とし, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathscr{H}$ を O.S.N. とする (ただし, $N < \infty$). このとき, $\Psi_{\mathrm{pr}} \in \mathscr{H}$ が

(i) $\Psi_{\mathrm{pr}} \in \mathrm{L.h.}\{\Psi_n\}_{n=1}^{N}$
(ii) $(\Psi - \Psi_{\mathrm{pr}}) \perp \Psi_n (n = 1, \ldots, N)$

をみたすとき, Ψ_{pr} を $\mathrm{L.h.}\{\Psi_n\}_{n=1}^{N}$ への**正射影** (orthogonal projection) という

Remark 1.2.1. 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して, (i), (ii) をみたすベクトル Ψ_{pr} は唯一つ存在する. 実際, そのようなベクトル $\Psi_{\mathrm{pr}}\mathscr{H}$ が存在すると仮定すると, $\Psi_{\mathrm{pr}}\mathscr{H}$ を L.h.$\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ への正射影とすると, Proposition 1.2.1 と (i), (ii) から,

$$\Psi_{\mathrm{pr}} = \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n \tag{1.5}$$

が成り立つからである.

Definition 1.2.5. (1.5) の右辺に現れる $\langle \Psi_n, \Psi \rangle$ を Ψ の Ψ_n **方向への成分**あるいは**係数**という. 特に, $N = 1$ の場合, Ψ_{pr} を Ψ_1 **方向への正射影**という.

Remark 1.2.2. 正射影の概念を援用することにより, $\mathscr{H}$ の一次独立なベクトル $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ から, $\mathscr{H}$ の O.N.S. $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ を作ることができる. この方法を **Gram-Schmidt の直交化法**という (詳しくは [3, pp.19–20] を参照).

O.N.S. で特に重要な場合を導入するための定理を述べる ([3, p.38, 定理 1.23] 参照).

Theorem 1.2.1. $(\mathscr{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{H}})$ を Hilbert 空間とし, $\{\Psi_j\}_{j \in J}$ を $\mathscr{H}$ の O.N.S. とする. このとき, 次の条件 (i)–(iv) は同値である.

(i) L.h.$\{\Psi_j\}_{j \in J}$ は $\mathscr{H}$ で稠密.

(ii) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{j \in J} \langle \Psi, \Psi_j \rangle \langle \Psi_j, \Phi \rangle.$$

(iii) (**Parseval の等式**) 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle \Psi_j, \Psi \rangle|^2.$$

(iv) 任意の $j \in J$ に対して, $\langle \Psi_j, \Psi \rangle = 0$ ならば, $\Psi = 0_{\mathscr{H}}$.

Definition 1.2.6 (完全正規直交系)**.** Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の正規直交系 $\{\Psi\}_{j \in J}$ が, Theorem 1.2.1 の条件 (i)–(iv) のいずれかをみたすとき, $\{\Psi_j\}_{j \in J}$ を**完全正規直交系** (orthonormal system ; C.O.N.S. と略す) という.

Remark 1.2.3. 条件 (iv) から, $\{\Psi_j\}_{j \in J}$ が C.O.N.S. であるとは, $\{\Psi_j\}_{j \in J}$ を含むような O.N.S. が存在しないことを意味する ([34, p.86])

Example 1.2.1. $[0, 2\pi]$ 上の関数列 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を次で定める:

$$\varphi_n(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \qquad (x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{Z}).$$

このとき, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $L^2([0, 2\pi])$ の C.O.N.S. である.

Hilbert 空間の可分性と C.O.N.S. には次の関係がある.

Theorem 1.2.2. Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ が可分であることの必要十分条件は, $\mathscr{H}$ が可算個の C.O.N.S. をもつことである.

Remark 1.2.4. Theorem 1.2.2 から可分な Hilbert 空間は可算個の C.O.N.S. をもつことがわかるが, 可分とは限らない Hilbert 空間に対しても, C.O.N.S. をもつことを示すことができる, すなわち, 任意の O.N.S. に対して, それを含むような C.O.N.S. が存在することを示すことができる ([34, p.87, Theorem4.22] 参照[*3]).

1.3 完備化

完備でない内積空間を Hilbert 空間に拡張する手法について述べる[*4].

$\mathscr{H}$ を完備でない内積空間とし, $CS(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ の Cauchy 列全体からなる集合とする.

[Step1] 任意の $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \in CS(\mathscr{H})$ に対して,

$$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n\to\infty} \|\Psi_n - \Phi_n\|_{\mathscr{H}} = 0$$

と定めると, 関係 $\sim$ は同値関係となる.

$$\widetilde{\mathscr{H}} \coloneqq CS(\mathscr{H})/\sim = \{[\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}] : \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \in CS(\mathscr{H})\}$$

と定める. ただし $[\{\Psi_n\}]$ は $\{\Psi_n\}$ の同値類を表す. 任意の $[\{\Psi_n\}], [\{\Phi_n\}] \in \widetilde{\mathscr{H}}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$[\{\Psi_n\}] + [\{\Phi_n\}] \coloneqq [\{\Psi_n + \Phi_n\}]$$
$$\alpha[\{\Psi_n\}] \coloneqq [\{\alpha\Psi_n\}]$$

と定めると, この定義が同値類の代表元の選び方に依らないことがわかる. また, この定義から, $\widetilde{\mathscr{H}}$ はベクトル空間となる.

[Step2] 任意の $\Psi = [\{\Psi_n\}], \Phi = [\{\Phi_n\}] \in \widetilde{\mathscr{H}}$ に対して,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\widetilde{\mathscr{H}}} \coloneqq \lim_{n\to\infty} \langle \Psi_n, \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}}$$

と定めると, この定義が同値類の代表元の選び方に依らないことがわかる. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widetilde{\mathscr{H}}}$ は $\widetilde{\mathscr{H}}$ の内積であり,

$$\langle \Psi, \Psi \rangle_{\widetilde{\mathscr{H}}} = \|\Psi\|_{\widetilde{\mathscr{H}}}^2$$

が成り立つ.

[Step3] $\mathscr{H}$ が $\widetilde{\mathscr{H}}$ で稠密となることを示す. そのためにいくつかの準備をする. $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\{\Psi\}_{n=1}^{\infty} \coloneqq \{\Psi, \Psi, \ldots, \Psi, \ldots\}$$

と定める (すべての項が Ψ であるような点列 (定点列)). このとき,

$$[\{\Psi\}_{n=1}^{\infty}] = \left\{ \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \in CS(\mathscr{H}) : \lim_{n\to\infty} \Phi_n = \Psi \right\}$$

であり,

$$\|[\{\Psi\}_{n=1}^{\infty}]\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} = \|\Psi\|_{\mathscr{H}} \tag{1.6}$$

[*3] ただし, 証明には Hausdorff の極大定理という選択公理と同値な命題を用いている.

[*4] 考え方は有理数体から実数体を構成する方法と同様である.

が成り立つ. そこで, 定点列の同値類の全体を

$$[\mathscr{H}] \coloneqq \{[\{\Psi\}_{n=1}^{\infty}] : \Psi \in \mathscr{H}\}$$

で定めると, $[\mathscr{H}]$ は $\widetilde{\mathscr{H}}$ の部分空間となる. ここで, (1.6) から, 写像

$$J\colon \mathscr{H} \ni \Psi \mapsto [\{\Psi\}_{n=1}^{\infty}] \in [\mathscr{H}]$$

により, $\mathscr{H}$ と $[\mathscr{H}]$ を同一視できることに注意する. この同一視の下で $\mathscr{H}$ が $\widetilde{\mathscr{H}}$ で稠密となることを示す. 任意の $\Psi = [\{\Psi_n\}] \in \widetilde{\mathscr{H}}$ に対して,

$$\Psi^{(k)} \coloneqq [\{\Psi_k\}_{n=1}^{\infty}] \in [\mathscr{H}]$$

と定める (すべての項が Ψ_k である定点列). このとき,

$$\|\Psi^{(k)} - \Psi\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} = \lim_{n\to\infty} \|\Psi_k - \Psi_n\|_{\mathscr{H}}$$

なので, $\{\Psi_n\}$ が Cauchy 列であることに注意すると,

$$\lim_{k\to\infty} \|\Psi^{(k)} - \Psi\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} = 0$$

となる. したがって, $\mathscr{H}$ は $\widetilde{\mathscr{H}}$ で稠密である.

[Step4] $\widetilde{\mathscr{H}}$ が Hilbert 空間となることを示す. $\{\Psi_N\}_{N=1}^{\infty}$ を $\widetilde{\mathscr{H}}$ の任意の Cauchy 列とすると, 各 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$N, M \geq N_0 \ \Rightarrow\ \|\Psi_N - \Psi_M\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} < \varepsilon$$

となる $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき, [Step3] の議論から, 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して, $\|\Phi^{(N)} - \Psi_N\| < 1/N$ となる $\Phi^{(N)} \in [\mathscr{H}]$ が存在する. $\Phi^{(N)} = [\{\Phi_N\}_{n=1}^{\infty}](\Phi_N \in \mathscr{H})$ とすると, $N, M \geq N_0$ ならば,

$$\begin{aligned}
\|\Phi_N - \Phi_M\|_{\mathscr{H}} &= \|\Phi^{(N)} - \Phi^{(M)}\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} \\
&\leq \|\Phi^{(N)} - \Psi_N\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} + \|\Psi_N - \Psi_M\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} + \|\Psi_M - \Phi^{(M)}\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} \\
&< \varepsilon + \frac{1}{N} + \frac{1}{M}
\end{aligned}$$

となり, $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \in CS(\mathscr{H})$ が成り立つ. ここで, $\Phi \coloneqq [\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}]$ とおく. このとき, $\Phi \in \widetilde{\mathscr{H}}$ である. また, $N \geq N_0$ ならば,

$$\begin{aligned}
\|\Psi_N - \Phi\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} &\leq \|\Psi_N - \Phi^{(N)}\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} + \|\Phi^{(N)} - \Phi\|_{\widetilde{\mathscr{H}}} \\
&< \frac{1}{N} + \lim_{n\to\infty} \|\Phi_N - \Phi_n\| \\
&\leq \varepsilon + \frac{2}{N}
\end{aligned}$$

なので, $\lim_{N\to\infty} \Psi_N = \Phi$ が成り立つ. よって, $\widetilde{\mathscr{H}}$ は Hilbert 空間である.

Definition 1.3.1. Hilbert 空間 $\widetilde{\mathscr{H}}$ を $\mathscr{H}$ の完備化という.

2 Hilbert 空間上の作用素

この節を通して, 特に断りのない限り, $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ は可分な複素 Hilbert 空間とする[*5].

2.1 線形作用素

Definition 2.1.1 (線形作用素)**.** $\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分空間とする. 写像 $T\colon \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ が, 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$T(\Psi + \Phi) = T\Psi + T\Phi, \quad T(\alpha\Psi) = \alpha T\Psi$$

をみたすとき, T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への**線形作用素** (linear operator) という. この場合, $\mathscr{D}$ を T の**定義域**といい, $\mathrm{dom}(T) \coloneqq \mathscr{D}$ と表し, $\mathscr{K}$ の部分空間 $\mathrm{ran}(T) \coloneqq \{T\Psi \,:\, \Psi \in \mathrm{dom}(T)\}$ を T の**値域** という. また, $\mathscr{H}$ からそれ自身への線形作用素を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素という.

Definition 2.1.2 (作用素の演算)**.** $\mathscr{L}$ を可分な複素 Hilbert 空間とし, T, S を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素, U を $\mathscr{K}$ から $\mathscr{L}$ への線形作用素とする. また, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. 作用素 $T+S, \alpha T, UT$ をそれぞれ次で定める.

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(T+S) &\coloneqq \mathrm{dom}(T) \cap \mathrm{dom}(S) & (T+S)\Psi &\coloneqq T\Psi + S\Psi \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(T+S))\\
\mathrm{dom}(\alpha T) &\coloneqq \mathrm{dom}(T) & (\alpha T)\Psi &\coloneqq \alpha T\Psi \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(\alpha T))\\
\mathrm{dom}(UT) &\coloneqq \{\Psi \in \mathrm{dom}(T) \,:\, T\Psi \in \mathrm{dom}(U)\} & (UT)\Psi &\coloneqq U(T\Psi) \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(UT))
\end{aligned}$$

と定める. $T+S$ を T と S の**和**といい, αT を T の**スカラー積**という. また, UT を U と T の**積**という.

Definition 2.1.3 (作用素の有限個の積)**.** $n \geq 2$ とし, $\mathscr{H}_j (j = 1, \ldots, n+1)$ を Hilbert 空間とする. また, T_j を $\mathscr{H}_j$ から $\mathscr{H}_{j+1}$ への線形作用素とする. このとき, $T_3(T_2T_1)$ は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(T_3T_2T_1) &\coloneqq \{\Psi \in \mathrm{dom}(T_2T_1) \,:\, (T_2T_1)\Psi \in \mathrm{dom}(T_3)\}\\
&= \{\Psi \in \mathrm{dom}(T_1) \,:\, T_1\Psi \in \mathrm{dom}(T_3T_2)\}
\end{aligned}$$

を定義域とする, $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_4$ への線形作用素である. この場合,

$$T_3(T_2T_1)\Psi = T_3((T_2T_1)\Psi) = T_3(T_2(T_1\Psi))$$

が成り立つ. そこで, $T_3(T_2T_1) = T_3T_2T_1$ と表す. 以下, 同様にして, $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_{n+1}$ への線形作用素 $T_n \cdots T_1$ が帰納的に,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(T_n \cdots T_1) &\coloneqq \{\Psi \in \mathrm{dom}(T_{n-1} \cdots T_1) \,:\, T_{n-1} \cdots T_1\Psi \in \mathrm{dom}(T_n)\}\\
(T_nT_{n-1} \cdots T_1)\Psi &= T_n((T_{n-1} \cdots T_1)\Psi) \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(T_n \cdots T_1))
\end{aligned}$$

によって定義される. 特に, T が $\mathscr{H}$ 上の線形作用素のとき, T の有限個の積を T の**ベキ乗**あるいは**累乗**といい,

$$T^n \coloneqq \underbrace{T \cdots T}_{n\text{ 個}} \tag{2.1}$$

と表す. これを T の n **乗** という.

[*5] 可分かつ複素という仮定は J. von Neumann の著書 [33] とその日本語訳 [15] に準ずる.

Definition 2.1.4 (逆作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への単射な線形作用素とする．このとき，任意の $\Phi \in \mathrm{ran}(T)$ に対して,

$$T\Psi = \Phi \tag{2.2}$$

となる $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ が唯一つ存在する．そこで, $\Phi \in \mathrm{ran}(T)$ に対して, (2.2) 式をみたす $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ を対応させせる写像を T^{-1} と表し, T^{-1} を T の**逆作用素** (inverse operator) という.

2.2 基本的な作用素のクラス

以下では線形作用素でよく使われるクラスである有界作用素を中心に, 閉作用素, 稠密に定義された作用素について述べる.

2.2.1 有界作用素

最も基本となる有界作用素について述べる.

Definition 2.2.1 (有界作用素, 非有界作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする．定数 $C \geq 0$ が存在して, 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ に対して,

$$\|T\Psi\| \leq C\|\Psi\| \tag{2.3}$$

が成り立つとき, T は**有界**であるといい, 有界な線形作用素を**有界作用素** (bounded operator) という．有界でない線形作用素を**非有界作用素** (unbounded operator) という.

Example 2.2.1. (i) $O_{\mathscr{H},\mathscr{K}} \colon \mathscr{H} \ni \Psi \mapsto 0_{\mathscr{K}} \in \mathscr{K}$ と定めると, $O_{\mathscr{H},\mathscr{K}}$ は有界作用素である．この作用素を**零作用素**という.

(ii) $I_{\mathscr{H}} \colon \mathscr{H} \ni \Psi \mapsto \Psi \in \mathscr{H}$ と定めると, $I_{\mathscr{H}}$ は有界作用素である．この作用素を**恒等作用素**という[*6].

定義域が $\mathscr{H}$ であるような $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素全体の集合を $\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ と表す．特に, $\mathscr{K} = \mathscr{H}$ の場合は $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ と表す．$\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の代数構造については次の命題が成り立つ.

Proposition 2.2.1. $\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ は Definition 2.1.2 で定義した和・スカラー積に関してベクトル空間をなす．ただし, 零ベクトルは零作用素 $O_{\mathscr{H},\mathscr{K}}$ である．特に, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ については, Definition 2.1.2 で定義した積に関して単位元をもつ多元環となる．ただし, 単位元は恒等作用素 I である.

次の定理は $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ が有界な逆作用素をもつための必要十分条件を与える ([12, p.40, 定理 8.2] 参照).

Theorem 2.2.1. $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ とする．このとき, T が単射かつ T^{-1} が有界となるための必要十分条件は,

$$\|T\Psi\| \geq C\|\Psi\| \qquad (\Psi \in \mathscr{H}) \tag{2.4}$$

となる $C \geq 0$ が存在することである.

Theorem 2.2.1 の系として次をえる ([12, p.41, 系] 参照).

*6 以下では, どの Hilbert 空間上の恒等作用素かが明らかな場合は, 単に I と書くことにする.

Corollary 2.2.1. $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ とする．このとき, 次は同値である.

(i) T^{-1} が存在し, $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ である.

(ii) $ST = I_{\mathscr{H}}$, $TS = I_{\mathscr{K}}$ となる $S \in \mathscr{B}(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ が存在する.

(iii) T は全射で (2.4) をみたす $C \geq 0$ が存在する.

T が $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素のとき, (2.3) から,

$$\|T\|_{\mathrm{op}} \coloneqq \sup\left\{ \frac{\|T\Psi\|}{\|\Psi\|} \,:\, \Psi \in \mathrm{dom}(T),\ \Psi \neq 0_{\mathscr{H}} \right\} \leq C$$

が成り立つ．$\|T\|_{\mathrm{op}}$ を T の**作用素ノルム**という．作用素ノルムについては次の命題が成り立つ.

Proposition 2.2.2. $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素 T に対して,

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathrm{op}} &= \sup\{\|T\Psi\| \,:\, \Psi \in \mathrm{dom}(T),\ \|\Psi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T\Psi\| \,:\, \Psi \in \mathrm{dom}(T),\ \|\Psi\| = 1\} \\ &= \inf\{C \geq 0 \,:\, \|T\Psi\| \leq C\|\Psi\|\ (\forall \Psi \in \mathrm{dom}(T))\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

作用素ノルムと呼ばれる理由は次の定理による[*7] .

Theorem 2.2.2. $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ は $\mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ のノルムである．また, $\mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ は $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ に関して Banach 空間となる.

Definition 2.2.2 (有界作用素の無限級数)**.** $T_n \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})(n = 1, 2, 3, \dots)$ とし,

$$S_N \coloneqq \sum_{n=1}^{N} T_n \qquad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく．このとき, $\{S_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ である．この $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が収束列であるとき, すなわち,

$$\lim_{N \to \infty} \|S_N - S\|_{\mathrm{op}} = 0$$

となる $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ が存在するとき, 作用素 T_n の**無限級数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

は S に**収束する**といい,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

と書く.

$\mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ における無限級数が収束するための十分条件は, 次の命題によって与えられる ([3, p.75, 命題 2.10]).

[*7] Banach 空間の定義については Appendix D を参照.

Proposition 2.2.3. $T_n \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < \infty$$

をみたすならば, T_n の無限級数も収束する.

以下では, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ におけるある種の無限級数を考える. そのために, 次の補題を用意する ([3, p.76, 補題 2.12]).

Lemma 2.2.1. $T_n, T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ とし, $\|T_n - T\|_{\mathrm{op}} \to 0 (n \to \infty)$ とする. このとき, 任意の $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ に対して, $\|T_n S - TS\|_{\mathrm{op}} \to 0, \|ST_n - ST\|_{\mathrm{op}} \to 0 (n \to \infty)$ が成り立つ.

Proposition 2.2.3, Lemma 2.2.1, Corollary 2.2.1 から次の定理をえる ([3, p.76, 定理 2.11]).

Theorem 2.2.3. $T \in \mathscr{H}$ とする. このとき, $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$ ならば, $I + T$ は全単射であり, $(I + T)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ かつ

$$(I + T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^n \tag{2.5}$$

が成り立つ[*8] [*9].

2.2.2 閉作用素, 稠密に定義された作用素

Definition 2.2.3 (閉作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする. T が**閉である** (closed) とは, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}(T)$ が条件 $\Psi_n \to \Psi \in \mathscr{H}, T\Psi_n \to \Phi \in \mathscr{K}$ $(n \to \infty)$ をみたすならば, つねに $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ かつ $\Phi = T\Psi$ が成り立つ. 閉である線形作用素を**閉作用素** (closed operator) という.

Definition 2.2.4 (稠密に定義された作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする. $\mathrm{dom}(T)$ が $\mathscr{H}$ で稠密なとき, T を**稠密に定義された作用素** (densely defined operator) という.

Remark 2.2.1. (1) T が $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素ならば, T は閉作用素であるが, その逆については一般には成り立たない.

(2) T が $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された有界作用素ならば,

$$\mathrm{dom}(\widetilde{T}) = \mathscr{H}, \quad \widetilde{T}\Psi = T\Psi \ (\Psi \in \mathrm{dom}(T)), \quad \|\widetilde{T}\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}}$$

となる有界作用素 $\widetilde{T} \colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ が存在する ([3, p.71, 定理 2.8] 参照). このことから, 以下では, 特に断りのない限り, 有界作用素の定義域は Hilbert 空間全体であるとする.

閉作用素を特徴付ける定理について述べる. そのための準備として次の概念を導入する.

Definition 2.2.5 (グラフ)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素に対して, $\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ の部分集合

$$G(T) \coloneqq \{(\Psi, T\Psi) \,:\, \Psi \in \mathrm{dom}(T)\}$$

[*8] 無限級数 (2.5) を **Neumann 級数**という. ただし, ここでいう Neumann とは C. Neumann のことであって J. von Neumann のことではない.

[*9] 考え方は, $|z| < 1$ となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ級数展開 (幾何級数展開) $(1 + z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ と本質的には同じである.

を T の**グラフ** (graph) という. $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ の部分集合 $\mathscr{M}$ がある作用素のグラフとなるとき, $\mathscr{M}$ を単にグラフという.

Remark 2.2.2. $G(T)$ は $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ の部分空間である.

グラフの概念を用いると, 閉作用素は次のように特徴付けられる ([6, p.104, 命題 2.6] 参照).

Proposition 2.2.4. $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素 T が閉作用素であるための必要十分条件は, T のグラフ $G(T)$ が $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ の閉集合である.

上述のように, 一般に閉作用素は有界作用素とはならないが, 定義域が $\mathscr{H}$ となる閉作用素については次の定理が成り立つ ([6, p.110, 定理 2.15] 参照) [*10].

Theorem 2.2.4 (閉グラフ定理)**.** T を $\mathrm{dom}(T)=\mathscr{H}$ となる $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への閉作用素とする. このとき, T は有界である.

Theorem 2.2.4 を用いると閉作用素に関する次の補題をえる ([8, 補題 付録 A.2] 参照).

Lemma 2.2.2. $\mathscr{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間とし, T,S を $\mathscr{H}$ 上の閉作用素とする. このとき, $\mathrm{dom}(T)\subset\mathrm{dom}(S)$ ならば,

$$\|S\Psi\|\leq C_1\|T\Psi\|+C_2\|\Psi\| \qquad (\Psi\in\mathrm{dom}(T))$$

となる $C_1,C_2\geq 0$ が存在する.

2.2.3 いくつかの記号と用語

Definition 2.2.6 (作用素の拡大)**.** T,S を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする.

$$\mathrm{dom}(T)\subset\mathrm{dom}(S),\quad T\Psi=S\Psi\ (\Psi\in\mathrm{dom}(T))$$

が成り立つとき, S は T の**拡大** (extension) であるといい, $T\subset S$ と書く.

Definition 2.2.7 (作用素の収束)**.** $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ とし, $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ とする.

(i) $\|T_n-T\|_{\mathrm{op}}\to 0\ (n\to\infty)$ となるとき, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は T に**一様収束する**という.

(ii) 任意の $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して, $\{T_n\Psi\}_{n=1}^{\infty}$ が $T\Psi$ に強収束するとき, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は T に**強収束する**といい,

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}T_n=T$$

と書く.

(iii) 任意の $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して, $\{T_n\Psi\}_{n=1}^{\infty}$ が $T\Psi$ に弱収束するとき, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は T に**弱収束する**といい,

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty}T_n=T$$

と書く.

---

*10 Banach 空間の場合でも成り立つ定理だが, Hilbert 空間の場合のみ扱う.

Remark 2.2.3. 定義から,

$$[\text{一様収束}] \ \Rightarrow\ [\text{強収束}] \ \Rightarrow\ [\text{弱収束}]$$

が成り立つ．これらの収束については, 無限次元の場合は本質的には異なるものであるが, 有限次元の場合では同値である ([3, p.129, 練習問題 8,9] 参照).

有界作用素の収束については次の定理が成り立つ ([12, p.167, 定理 32.1] 参照)

Theorem 2.2.5. $\mathscr{L}$ を可分な複素 Hilbert 空間とする．また, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(\mathscr{K},\mathscr{L})$ とし, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$, $S \in \mathscr{B}(\mathscr{K},\mathscr{L})$ とする.

(i) $\|T_n - T\|_{\mathrm{op}} \to 0 \ (n \to \infty)$, $\|S_n - S\|_{\mathrm{op}} \to 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow \|S_nT_n - ST\|_{\mathrm{op}} \to 0 \ (n \to \infty)$

(ii) $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} T_n = T$, $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} S_nT_n = ST$

Remark 2.2.4. “$\operatorname{w-lim}_{n\to\infty} T_n = T$, $\operatorname{w-lim}_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \operatorname{w-lim}_{n\to\infty} S_nT_n = ST$ ” については一般には成り立たない ([12, p.168, 注意 32.1] 参照).

2.3 自己共役作用素

量子力学において最も重要なクラスである自己共役作用素を定義する．そのための準備として共役作用素を定義することから始める．最初に $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の場合について定義する．そのための準備として次を定義する.

Definition 2.3.1 (有界線形汎関数)**.** $\mathrm{dom}(T) = \mathscr{H}$ かつ $\mathrm{ran}(T) \subset \mathbb{C}$ である線形作用素 $T\colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ が有界となるとき, T を**有界線形汎関数**という.

次の定理 ([3, p.66, 定理 2.4] 参照) を用いて有界作用素の共役作用素を定義する.

Theorem 2.3.1 (Riesz の表現定理)**.** 任意の有界線形汎関数 $F\colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ に対して,

$$F(\Psi) = \langle \Phi_F, \Psi \rangle \ (\Psi \in \mathscr{H}), \quad \|\Phi_F\| = \|F\|_{\mathrm{op}}$$

となる $\Phi_F \in \mathscr{H}$ が唯一つ存在する.

Remark 2.3.1. $\mathscr{H}$ 上の有界線形汎関数のなす集合を $\mathscr{H}^*$ とするする．$\Phi \in \mathscr{H}$ に対して, $\mathscr{H}$ 上の汎関数 F_Φ を

$$F_\Phi(\Psi) = \langle \Phi, \Psi \rangle$$

と定めると, Theorem 1.1.1 から, $F_\Phi \in \mathscr{H}^*$ となる．そこで, $\Lambda\colon \mathscr{H}^* \ni \Phi \mapsto F_\Phi \in \mathscr{H}^*$ という写像を考える．すると, Theorem 2.3.1 から, Λ **は全射かつ** $\|\Phi\| = \|\Lambda\Phi\|_{\mathrm{op}}$ **となる実線形作用素だが, 内積の定義から複素線形性は成り立たない**.

Definition 2.3.2 (共役作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素とし, $\Phi \in \mathscr{K}$ とする．$F_\Phi\colon \mathscr{H} \ni \Psi \mapsto \langle \Phi, T\Psi \rangle_{\mathscr{K}} \in \mathbb{C}$ と定めると, F_Φ は有界線形汎関数となるので, Theorem 2.3.1 から, $F_\Phi(\Psi) = \langle \Theta_\Phi, \Psi \rangle_{\mathscr{H}}$ となる $\Theta_\Phi \in \mathscr{H}$ が唯一つ存在する．そこで, 写像 $\mathscr{K} \ni \Phi \mapsto \Theta_\Phi \in \mathscr{H}$ のことを T^* と書き, T の**共役作用素** (adjoint operator) という.

次に, T が $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への非有界作用素の場合について考える. そのために必要な命題を 1 つ準備する ([3, p.39, 命題 1.24] 参照).

Proposition 2.3.1. $\mathscr{H}$ の部分空間 $\mathscr{D}$ が稠密となるための必要十分条件は, $\mathscr{D}^{\perp} = \{0_{\mathscr{H}}\}$ が成り立つことである.

Definition 2.3.3 (共役作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された作用素とする. $\mathscr{K}$ の部分空間 $\mathrm{dom}(T^*)$ を次で定義する.

$$\mathrm{dom}(T^*) \coloneqq \{\Phi \in \mathscr{K} \,:\, \exists \Theta_\Phi \in \mathscr{H} \text{ s.t. } \forall \Psi \in \mathrm{dom}(T),\ \langle \Phi, T\Psi \rangle_{\mathscr{K}} = \langle \Theta_\Phi, \Psi \rangle_{\mathscr{H}}\}$$

ここで $\mathrm{dom}(T)$ の稠密性を用いると, Proposition 2.3.1 から, Θ_Φ は Φ に対して一意的に定まる. そこで, 写像 $\mathrm{dom}(T^*) \ni \Phi \mapsto \Theta_\Phi \in \mathscr{H}$ のことを T^* と書き, T^* を T の**共役作用素** (adjoint operator) という.

Remark 2.3.2. T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素または稠密に定義された作用素とする.

(1) 共役作用素の定義から,

$$\langle \Phi, T\Psi \rangle_{\mathscr{K}} = \langle T^*\Phi, \Psi \rangle_{\mathscr{H}} \qquad (\Phi \in \mathrm{dom}(T^*)),\ (\Psi \in \mathrm{dom}(T))$$

が成り立つ.

(2) $\mathrm{dom}(T)$ が稠密でなければ T^* は定義されない.

共役作用素については次の命題が成り立つ ([3, p.86, 命題 2.17], [3, p.83, 命題 2.15] 参照).

Proposition 2.3.2. T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素または稠密に定義された作用素とする. このとき, T^* は $\mathscr{K}$ から $\mathscr{H}$ への閉作用素である. 特に, T が有界ならば, T^* も有界作用素であって $\|T^*\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}}$ が成り立つ.

作用素の和と積の共役作用素については, 次の事実が成り立つ ([3, p.85, 命題 2.16]).

Proposition 2.3.3. (i) T, S を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された作用素とする. このとき, $\mathrm{dom}(T+S)$ が $\mathscr{H}$ で稠密であるならば,

$$(T+S)^* \supset T^* + S^*$$

が成り立つ. 特に, T または S が有界ならば, $(T+S)^* = T^* + S^*$ が成り立つ.

(ii) $\mathscr{L}$ を可分な複素 Hilbert 空間とする. また, T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された作用素とし, S を $\mathscr{K}$ から $\mathscr{L}$ への稠密に定義された作用素とする. このとき, $\mathrm{dom}(ST)$ が $\mathscr{H}$ で稠密ならば,

$$(ST)^* \supset T^*S^*$$

が成り立つ. 特に, S が有界ならば, $(ST)^* = T^*S^*$ が成り立つ.

Definition 2.3.4 (エルミート作用素)**.** $\mathscr{H}$ 上の線形作用素 T が

$$\langle \Phi, T\Psi \rangle_{\mathscr{H}} = \langle T\Phi, \Psi \rangle_{\mathscr{H}} \qquad (\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(T))$$

をみたすとき, T を**エルミート作用素** (Hermitian operator) という.

Definition 2.3.5 (対称作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された作用素とする.

$$\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T^*), \quad T\Psi = T^*\Psi \ (\Psi \in \mathrm{dom}(T))$$

が成り立つとき, すなわち, T^* が T の拡大であるとき, T を**対称作用素** (symmetric operator) という. 特に, T が閉かつ対称であるとき, T を**閉対称作用素** (closed symmetric operator) という.

Remark 2.3.3. T を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする.

(1) T が対称作用素ならば, エルミート作用素である.

(2) T が稠密に定義されたエルミート作用素ならば, 対称作用素である.

(3) T が対称作用素であることと,

$$\langle T\Psi, \Phi\rangle_{\mathscr{H}} = \langle \Psi, T\Phi\rangle_{\mathscr{H}} \qquad (\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(T))$$

が成り立つことは同値である. したがって, T が対称作用素ならば, 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ に対して, $\langle \Psi, T\Psi\rangle$ は実数である.

(4) T が $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された作用素で, 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ に対して, $\langle \Psi, T\Psi\rangle$ が実数ならば, T は対称作用素である.

Definition 2.3.6. T を $\mathscr{H}$ 上のエルミート作用素とする. このとき, ある定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在し, $\langle \Psi, T\Psi\rangle \geq \gamma\|\Psi\|^2$ $(\Psi \in \mathrm{dom}(T))$ が成り立つとき, T は**下に有界** (bounded below) であるといいい, $T \geq \gamma$ と書く. 特に, $\gamma = 0$ $(\gamma > 0)$ の場合, T は**非負** (nonnegative)(**正** (positive)) であるという.

Definition 2.3.7 (自己共役作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする. $\mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(T^*)$ が成り立つとき, T を**自己共役作用素** (self-adjoint operator) という.

Remark 2.3.4. T を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする.

(1) T が自己共役であることの定義を言い換えると, $\mathrm{dom}(T)$ が稠密であり, **作用素の等式** $T = T^*$ が成り立つことである.

(2) $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ が対称作用素ならば自己共役であるが, 有界でない対称作用素は必ずしも自己共役とは限らない.

(3) $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ならば, $TT^*, T^*T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ は非負自己共役作用素であり, $\|TT^*\|_{\mathrm{op}} = \|T^*T\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}}^2$ が成り立つ.

(4) T を自己共役作用素をとする. このとき, S が $T \subset S$ となる $\mathscr{H}$ 上の対称作用素ならば, $T = S$ が成り立つ ([3, p.105, 命題 2.27] 参照).

$\mathscr{H}$ 上の対称作用素 T が自己共役であることの特徴付けは, 次の定理によって与えられる ([3, p.163, 定理 4.1] 参照).

Theorem 2.3.2. T を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする. このとき, 次は同値である.

(i) T は自己共役である.

(ii) T は閉であり, 任意の実数 $\lambda \neq 0$ に対して, $\ker(T^* \pm i\lambda) = \{0_{\mathscr{H}}\}$.

(iii) 任意の実数 $\lambda \neq 0$ に対して, $\mathrm{ran}(T \pm i\lambda) = \mathscr{H}$.

Remark 2.3.5. Theorem 2.3.2 の (ii) は (ii)$'$, (ii)$''$ と同値である.

(ii)$'$ T は閉であり, $\ker(T^* \pm i\lambda) = \{0_{\mathscr{H}}\}$ となる実数 $\lambda \neq 0$ が存在する.
(ii)$''$ T は閉であり, $\ker(T^* \pm i) = \{0_{\mathscr{H}}\}$.

また, (iii) は (iii)$'$, (iii)$''$ と同値である.

(iii)$'$ $\mathrm{ran}(T \pm i\lambda) = \mathscr{H}$ となる実数 $\lambda \neq 0$ が存在する.
(iii)$''$ $\mathrm{ran}(T \pm i) = \mathscr{H}$

2.4 かけ算作用素

$\mathfrak{M}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の Lebesgue 可測集合族とし, dx を Lebesgue 測度とする. ここでは, 特に断りのない限り, $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \coloneqq L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}^d, dx)$ の場合を考える.

Definition 2.4.1 (かけ算作用素)**.** $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ を複素数値可測関数とする. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の写像 M_w を

$$\mathrm{dom}(M_w) \coloneqq \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, \int_{\mathbb{R}^d} |w(x)f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$
$$(M_w f)(x) \coloneqq w(x)f(x) \qquad (f \in \mathrm{dom}(M_w),\ x \in \mathbb{R}^d)$$

で定めると M_w は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素である. M_w を関数 w による**かけ算作用素** (multiplication operator) という.

一般に, かけ算作用素は稠密に定義された閉作用素である ([3, p.79, 例 2.17, p.87, 例 2.21] 参照). 一方で, 関数 w が本質的に有界な関数である, すなわち, 定数 $C \geq 0$ が存在し $|w(x)| \leq C$ a.e $x \in \mathbb{R}^d$ であるならば, $\mathrm{dom}(M_w) = L^2(\mathbb{R}^d)$ かつ M_w は有界となる ([3, p.63, 例 2.8] 参照). かけ算作用素 M_w の共役作用素については次の事実が知られている ([3, p.84, 例 2.20] 参照).

Proposition 2.4.1. w を複素数値 Borel 可測関数とし, M_w を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の w によるかけ算作用素とする. このとき, M_w の共役作用素 M_w^* については

$$\mathrm{dom}(M_w^*) = \mathrm{dom}(M_w), \quad (M_w^* f)(x) = \overline{w(x)} f(x)\ (f \in \mathrm{dom}(M_w^*),\ x \in \mathbb{R}^d)$$

が成り立つ.

Proposition 2.4.1 から次をえる ([3, p.103, 例 2.33] 参照).

Proposition 2.4.2. w が実数値関数ならば, M_w は自己共役作用素である. 特に, w が非負ならば, M_w も非負である.

Example 2.4.1 (位置作用素)**.** $k = (k_1, \ldots k_d) \in \mathbb{R}^d$ とする. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 X_j $(j = 1, \ldots, d)$ を

$$\mathrm{dom}(X_j) \coloneqq \{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, k_j f \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$$
$$(X_j f)(x) = k_j f(x)$$

で定めると, Proposition 2.4.2 から, X_j は自己共役である. この作用素のことを**位置作用素**という.

2.5 本質的自己共役性

Definition 2.5.1 (可閉作用素)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする. このとき, $T \subset S$ となる $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への閉作用素 S が存在するとき, T は**可閉** (closable) であるといい, 可閉な線形作用素を**可閉作用素** (closable operator) という. また, S を T の**閉拡大** (closed extension) という.

作用素が可閉であるための必要十分条件は次の命題によって与えられる ([3, p.87, 命題 2.18] 参照).

Proposition 2.5.1. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) T は $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への可閉作用素である.
(ii) $\{\Psi_n\}_n \subset \mathrm{dom}(T)$ が $\Psi_n \to 0$, $T\Psi_n \to \Phi$ をみたすならば, $\Phi = 0_{\mathscr{K}}$.

Definition 2.5.2 (作用素の閉包)**.** T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への可閉作用素とする. $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素 $\overline{T}$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\overline{T}) &:= \{\Psi \in \mathscr{H} : \exists\{\Psi_n\} \subset \mathrm{dom}(T) \text{ s.t. } \Psi_n \to \Psi,\ T\Psi_n \to \Phi \in \mathscr{K}\} \\ \overline{T}\Psi &:= \lim_{n\to\infty} T\Psi_n \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(\overline{T})) \end{aligned}$$

と定める. Proposition 2.5.1(ii) から, Ψ_n の選び方に依らず $\overline{T}\Psi$ が定まる. また, $\overline{T}$ は T の閉拡大である. このように定義される作用素 $\overline{T}$ を T の**閉包** (closure) という.

Remark 2.5.1. $\overline{T}$ は T の最小の閉拡大である. つまり, T の任意の閉拡大 S に対して, $\overline{T} \subset S$ が成り立つ.

Definition 2.5.3. T を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする. $\overline{T}$ が自己共役となるとき, T は**本質的に自己共役** (essentially self-adjoint) という.

この言葉の使い方の正当性は, 次の事実による ([3, p.165, 命題 4.2] 参照).

Proposition 2.5.2. $\mathscr{H}$ 上の対称作用素 T が本質的に自己共役ならば, T は唯一つの自己共役拡大をもち, それは $\overline{T}$ に等しい.

$\mathscr{H}$ 上の対称作用素 T が本質的に自己共役であることの特徴付けは, 次の定理によって与えられる ([3, p.165, 定理 4.3] 参照).

Theorem 2.5.1. T を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする. このとき, 次は同値である.

(i) T は本質的に自己共役である.
(ii) 任意の実数 $\lambda \neq 0$ に対して, $\ker(T^* \pm i\lambda) = \{0_{\mathscr{H}}\}$.
(iii) 任意の実数 $\lambda \neq 0$ に対して, $\mathrm{ran}(T \pm i\lambda)$ は $\mathscr{H}$ で稠密である.

Remark 2.5.2. Theorem 2.5.1 の (ii) は (ii)$'$, (ii)$''$ と同値である.

(ii)$'$ $\ker(T^* \pm i\lambda) = \{0_{\mathscr{H}}\}$ となる実数 $\lambda \neq 0$ が存在する.
(ii)$''$ $\ker(T^* \pm i) = \{0_{\mathscr{H}}\}$.

また, (iii) は (iii)$'$, (iii)$''$ と同値である.

(iii)$'$ $\mathrm{ran}(T \pm i\lambda)$ は $\mathscr{H}$ で稠密となる実数 $\lambda \neq 0$ が存在する.
(iii)$''$ $\mathrm{ran}(T \pm i)$ は $\mathscr{H}$ で稠密である.

2.6 ユニタリ作用素

有界作用素の特殊なクラスを導入する.

Definition 2.6.1 (ユニタリ作用素)**.** U を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{dom}(U) = \mathscr{H}, \quad \mathrm{ran}(U) = \mathscr{K}, \\
&\langle U\Psi, U\Phi\rangle_{\mathscr{K}} = \langle \Psi, \Phi\rangle_{\mathscr{H}} \qquad (\Psi, \Phi \in \mathscr{H})
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

をみたすとき, U を**ユニタリ作用素** (unitary operator) という.

Remark 2.6.1. (2.6) 式からユニタリ作用素は単射である. 実際, U を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのユニタリ作用素とすと, (2.6) 式から,

$$
\|U\Psi\| = \|\Psi\| \qquad (\Psi \in \mathscr{H}) \tag{2.7}
$$

が成り立つからである. (2.7) をユニタリ作用素 U の**等長性**という. (2.7) から, ユニタリ作用素 U は有界作用素であり, $\|U\|_{\mathrm{op}} = 1$ であることがわかる.

Definition 2.6.2. $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのユニタリ作用素が存在するとき, $\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ は**同型** (isomorphic) であるという.

ユニタリ作用素の基本的な性質について述べておく.

Theorem 2.6.1. U を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのユニタリ作用素とする.

(i) U^{-1} は $\mathscr{K}$ から $\mathscr{H}$ へのユニタリ作用素であり, $U^{-1} = U^*$ が成り立つ.
(ii) $\mathscr{D}$ が $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間ならば, $U\mathscr{D} \coloneqq \{U\Psi : \Psi \in \mathscr{D}\}$ は $\mathscr{K}$ の稠密な部分空間である.
(iii) $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ が $\mathscr{H}$ の C.O.N.S. ならば, $\{U\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathscr{K}$ の C.O.N.S. である.
(iv) $\mathscr{L}$ を可分な Hilbert 空間とし, V が $\mathscr{K}$ から $\mathscr{L}$ へのユニタリ作用素ならば, VU は $\mathscr{H}$ から $\mathscr{L}$ へのユニタリ作用素である.

ユニタリ作用素の存在に関する基本的な事実を述べる ([3, p.69, 定理 2.5] 参照).

Theorem 2.6.2. $\{\Psi_n\}_{n=1}^N$, $\{\Phi_n\}_{n=1}^N$ $(N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ を, それぞれ, $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ の C.O.N.S. とする. このとき, $U\Psi_n = \Phi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ となるユニタリ作用素 $U \colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ が存在する.

Theorem 2.6.2 から次の結果が得られる ([3, p.69, 定理 2.6] 参照).

Theorem 2.6.3. $\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ $(N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ を $\mathscr{H}$ の C.O.N.S. とする. このとき,

(i) $N < \infty$ ならば, 対応

$$
\mathscr{H} \ni \Psi \mapsto \{\langle \Psi_n, \Psi\rangle\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N
$$

により, $\mathscr{H}$ と $\mathbb{C}^N$ は同型である.

(ii) $N=\infty$ ならば, 対応

$$\mathscr{H} \ni \Psi \mapsto \{\langle \Psi_n, \Psi \rangle\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

により, $\mathscr{H}$ と $\ell^2(\mathbb{N})$ は同型である.

Remark 2.6.2. Theorem 2.6.3 は, 可分な無限次元複素 Hilbert 空間は本質的には唯一つしかないことを意味している.

2.7 レゾルヴェントとスペクトル

Definition 2.7.1 (レゾルヴェント)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の閉作用素とする. このとき, $\lambda \in \mathbb{C}$ が以下の条件をみたすとき, λ は T の**レゾルヴェント集合** (resolvent set) にあるという.

(i) 作用素 $T-\lambda$ が全単射.
(ii) $R_\lambda(T) \coloneqq (T-\lambda)^{-1}$ が有界作用素.

R_λ を T の λ における**レゾルヴェント**という. また, T のレゾルヴェント集合を $\rho(T)$ で表す.

Definition 2.7.2 (スペクトル)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の閉作用素とする.

$$\sigma(T) \coloneqq \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

を T の**スペクトル** (spectrum) という.

Definition 2.7.3 (固有値)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする. $\lambda \in \mathbb{C}$ が T の**固有値** (eigenvalue) であるとは,

$$T\Psi = \lambda\Psi \tag{2.8}$$

となる $0_{\mathscr{H}} \neq \Psi \in \mathrm{dom}(T)$ が存在する, すなわち, $\ker(T-\lambda) \neq \{0_{\mathscr{H}}\}$ となるときにいう. T の固有値全体を $\sigma_p(T)$ と表し, これを T の**点スペクトル** (point spectrum) という. (2.8) をみたす Ψ を, 固有値 λ に属する T の**固有ベクトル** (eigenvector) という.

与えられた作用素の固有値および固有ベクトルを求める問題を**固有値問題** (eigenvalue problem) という. 作用素 T に対する固有値問題は, ベクトル方程式 (2.8) をみたす $\lambda \in \mathbb{C}$ とベクトル $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ の組 (λ, Ψ) を求める問題に他ならない. この方程式を**固有ベクトル方程式**という.

Definition 2.7.4. 部分空間 $\ker(T-\lambda)$ のことを λ の**固有空間**といい, $\ker(T-\lambda)$ の次元 $\dim\ker(T-\lambda)$ を固有値 λ の**多重度** (multiplicity) という. $\dim\ker(T-\lambda)=1$ のとき, λ は**単純** (simple) であるといい, $\dim\ker(T-\lambda) \geq 2$ のとき, λ は**縮退**しているといい, その多重度を**縮退度**ともいう.

次の定理は, スペクトルの基本的な性質について述べた定理である ([3, p.96, 定理 2.23, p.107, 定理 2.30] 参照).

Theorem 2.7.1. T を $\mathscr{H}$ 上の閉作用素とする. このとき次が成り立つ.

(i) $\sigma(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である.

(ii) T が有界ならば, $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ であり, $\sigma(T) \neq \emptyset$ である.

(iii) T が自己共役ならば, $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である. 特に, T が下に有界である, すなわち, $T \geq \gamma$ となる $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在するならば, $\sigma(T) \subset [\gamma, \infty)$ である.

(iv) (**スペクトルのユニタリ不変性**) $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U に対して,

$$\sigma(UTU^*) = \sigma(T), \quad \sigma_p(UTU^*) = \sigma_p(T)$$

が成り立つ. さらに, 任意の $\lambda \in \sigma_p(T)$ に対して, T の固有値としての多重度と UTU^* の固有値としての多重度は等しい.

Remark 2.7.1. Theorem 2.7.1(ii) によって, 有界作用素のスペクトルは空でないが, 非有界作用素に対しては同様の主張は成り立たない, すなわち, 非有界作用素のスペクトルについては空となる場合がある ([3, p.97, 例 2.26] 参照).

例としてかけ算作用素のスペクトルについて考える. これについては次の定理が成り立つ ([3, p.99, 定理 2.25] 参照).

Theorem 2.7.2. w を $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数とする. このとき次が成り立つ.

(i) $\sigma(M_w) = \overline{w(\mathbb{R}^d)}$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $w_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^d : w(x) = \lambda\}$ の Lebesgue 測度 $m(w_\lambda)$ が 0 ならば, $\lambda \notin \sigma_p(M_w)$. 特に, 任意の λ に対して, $m(w_\lambda) = 0$ ならば, $\sigma_p(M_w) = \emptyset$.

(iii) $m(w_\lambda) \neq 0$ ならば, λ は M_w の固有値, すなわち, $\lambda \in \sigma_p(M_w)$ であり, これに属する, M_w の固有空間は, $\{f \in \mathrm{dom}(M_w) : \mathrm{supp}\, f \subset w_\lambda\}$ である. ただし, $\mathrm{supp}\, f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$.

2.8 コンパクト作用素

有界作用素の特別な場合であるコンパクト作用素について取り上げる.

Definition 2.8.1 (コンパクト作用素)**.** T を $\mathrm{dom}(T) = \mathscr{H}$ である $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素とする. このとき, $\mathscr{H}$ の任意の有界集合 $\mathscr{D}$ に対して, $T\mathscr{D}$ が $\mathscr{K}$ の相対コンパクト集合となるとき, T を**コンパクト作用素** (compact operator) という.

Example 2.8.1. 零作用素はコンパクト作用素である.

次の定理が冒頭で述べた事実である ([3, p.110, 定理 2.33] 参照)

Theorem 2.8.1. コンパクト作用素は有界作用素である.

Theorem 2.8.1 からわかるように, コンパクト作用素は有界作用素の一種である. 次の定理から Hilbert 空間が有限次元の場合ではこの 2 つが同じ作用素であることがわかる ([3, p.110, 定理 2.34]). しかしながら, 無限次元の場合は有界作用素と異なる点が生じる ([3, p.111, 例 2.3.5]).

Theorem 2.8.2. (i) $\mathscr{H}$ が有限次元ならば, $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への任意の線形作用素はコンパクト作用素である.

(ii) $\mathscr{K}$ が有限次元ならば, $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への任意の有界作用素はコンパクト作用素である.

(iii) $\mathscr{H}$ が無限次元ならば, $I_{\mathscr{H}}\colon \mathscr{H}\ni\Psi\mapsto\Psi\in\mathscr{H}$ は有界ではあるがコンパクトではない[*11].

コンパクト作用素を特徴付ける定理を述べる. そのための準備として, 2 つ定理を述べる ([3, p.114, 定理 2.40, 2.41])

Theorem 2.8.3 (一様有界性の原理, Banach-Steinhaus の定理[*12 *13]). $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ とする. このとき, 任意の $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して,

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\Psi\|<\infty$$

ならば,

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\|<\infty$$

が成り立つ.

Theorem 2.8.4. $\mathscr{H}$ の点列 $\{\Psi_n\}$ が弱収束するならば, $\{\Psi_n\}$ は有界列である.

次の定理がコンパクト作用素を特徴付ける定理である[*14].

Theorem 2.8.5. $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ とする. このとき次は同値である.

(i) T はコンパクト作用素である.
(ii) $B_{\mathscr{H}}:=\{\Psi\in\mathscr{H}\,:\,\|\Psi\|\le 1\}$ に対して, $TB_{\mathscr{H}}$ は $\mathscr{K}$ の相対コンパクト集合となる.
(iii) $\mathscr{H}$ の任意の有界列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, $\{T\Psi_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ が収束列となる部分列 $\{\Psi_{n_j}\}$ が存在する.
(iv) $\mathscr{H}$ の任意の有界集合 $\mathscr{D}$ に対して, $T\mathscr{D}$ が $\mathscr{K}$ で全有界となる.
(v) $\mathscr{H}$ の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ が 0 に弱収束するならば, $\{T\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ は 0 に強収束する.

コンパクト作用素の 1 つのクラスを定義する[*15].

Definition 2.8.2 (有限階作用素). T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素とする. このとき, $\mathrm{ran}(T)$ が有限次元のとき, T を**有限階作用素** (finite-rank operator) という.

有限階作用素の一般形は次で与えられる.

Theorem 2.8.6. T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界作用素とし, $\dim\mathrm{ran}(T)=n$ する. このとき, $\mathscr{K}$ の正規直交系 $\{f_j\}_{j=1}^n$ と $\mathscr{H}$ の元 $\{g_j\}_{j=1}^n$ が存在して,

$$T\Psi=\sum_{j=1}^n\langle g_j,\Psi\rangle f_j\qquad(\Psi\in\mathscr{H})$$

[*11] Riesz の補題 ([12, p.60, 補題 13.1]) から, $I_{\mathscr{H}}$ がコンパクトとなることと $\mathscr{H}$ が有限次元であることは同値である ([12, p.61, 系])

[*12] Banach 空間にしても成り立つ定理だが, ここでは敢えて Hilbert 空間の場合しか扱わない.

[*13] 証明については [12, p.46] を参照されたい.

[*14] (i)–(iv) の同値性については Banach 空間の場合でも成り立つことが知られている (例えば [31, p.320, Proposition 3.4.4] 参照). 一方で, (v) $\Rightarrow$ (i) については一般の Banach 空間では成り立たないが, 回帰的 Banach 空間上であれば成り立つことが知られている ([17, pp.173–174] 参照).

[*15] コンパクト作用素のその他のクラスとしては, **トレース型作用素**, **Hilbert-Schmidt 型作用素**などがある. 詳しくは本 [2, 第 1 章] や [35] を参照されたい.

が成り立つ.

以下では, $\mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのコンパクト素全体の集合, $\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有限階作用素全体の集合とする. Theorem 2.8.1, Theorem 2.8.2 から,

$$\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K}) \subset \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K}) \subset \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$$

である.

次の定理は $\mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の代数構造についての定理である ([3, p.112, 定理 2.37]).

Theorem 2.8.7. (i) $T, S \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ならば, $\alpha T + \beta S \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ である. したがって, $\mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ は $\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の部分空間となる.

(ii) $\mathscr{G}, \mathscr{L}$ を可分な Hilbert 空間とし, $A \in \mathscr{C}(\mathscr{K},\mathscr{L})$, $B \in \mathscr{C}(\mathscr{G},\mathscr{H})$ とする. このとき, $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ ならば, $AS \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{L})$, $SB \in \mathscr{C}(\mathscr{G},\mathscr{K})$ である.

Theorem 2.8.7 から, $\mathscr{C}(\mathscr{H}) \coloneqq \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{H})$ に関して次の系をえる.

Corollary 2.8.1. $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $S \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ ならば, $TS, ST \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ である. したがって, $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ は $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ の両側イデアルとなる.

次の定理は $\mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ が $\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の閉部分空間であることを主張する定理である ([3, p.113, 定理 2.38]).

Theorem 2.8.8. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ とし, $\|T_n - T\|_{\mathrm{op}} \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば, $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ である.

次の定理は $\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ が $\mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ で稠密であることを主張する定理である*16 ([3, p.115, 定理 2.43]).

Theorem 2.8.9. $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ ならば, $\|T_n - T\|_{\mathrm{op}} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ が存在する.

次の定理は有界作用素とその共役作用素のコンパクト性についての定理である ([17, p.41, Theorem 4.4]).

Theorem 2.8.10. $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ であるための必要十分条件は, $T^* \in \mathscr{C}(\mathscr{K},\mathscr{H})$ である*17 .

最後に, 次の定理を紹介しておく ([3, p.124, 定理 2.54] 参照).

Theorem 2.8.11. $T \neq O$ となる任意の $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ に対して, 正の実数列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ $(N < \infty$ または $N = \infty)$ と $\mathscr{H}$ の正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{N}$ および $\mathscr{K}$ の正規直交系 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{N}$ が存在して

$$T\Xi = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \langle \Psi_n, \Xi \rangle \Phi_n \tag{2.9}$$

---

*16 Banach 空間論の文脈においては, Theorem 2.8.9 のことを Hilbert 空間は approximation property をもつと表現される. これと同様の問題, すなわち, "任意の Banach 空間は approximation property をもつか?" という問題は古くから考えられていた. この問題を肯定的に解決した結果や関連した結果については, A. Grothendieck により証明されている ([23]). 一方で, 反例については, 1973 年の P. Enflo 論文 [22] で初めて与えられた. さらに, 1981 年の A. Szankowski の論文 [36] で, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ が approximation property を持たないことが証明された.

*17 [3, p.113, 定理 2.39] でも述べられてはいるが, $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ ならば $T^* \in \mathscr{C}(\mathscr{K},\mathscr{H})$ しか扱われていない.

が成り立つ．ただし, $N = \infty$ の場合, 右辺は作用素ノルムの意味で収束する．

(2.9) 式を**コンパクト作用素の標準形**という．また, (2.9) 式における μ_n を T の**特異値** (singular value) という．

この他のコンパクト作用素の一般論については [3, pp.116–123] などを参照されたい．

3　作用素解析とスペクトル定理

3.1　正射影作用素とスペクトル測度

3.1.1　正射影作用素

次の正射影定理は Hilbert 空間に関する基本的な定理の 1 つである ([3, p.35, 定理 1.19] 参照).

Theorem 3.1.1 (正射影定理)**.** $\mathscr{H}$ を Hilbert 空間とし, $\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の閉部分空間とする. このとき, $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\Psi = \Psi_{\mathscr{D}} + \Psi_{\mathscr{D}^\perp}$$

となる $\Psi_{\mathscr{D}} \in \mathscr{D}$, $\Psi_{\mathscr{D}^\perp} \in \mathscr{D}^\perp$ がそれぞれ唯一つ存在する.

Definition 3.1.1. Theorem 3.1.1 における対応

$$\mathscr{H} \ni \Psi \mapsto \Psi_{\mathscr{D}} \in \mathscr{D}$$

を $P_{\mathscr{D}}$ と書く. このとき, $\|\Psi_{\mathscr{D}}\| \le \|\Psi\|$ なので, $P_{\mathscr{D}}$ は $\mathscr{H}$ 上の有界作用素である. $P_{\mathscr{D}}$ を $\mathscr{D}$ **上への正射影作用素**という.

$P_{\mathscr{D}}$ の基本的な性質について述べる.

Proposition 3.1.1. $P_{\mathscr{D}}$ を $\mathscr{D}$ 上への正射影作用素とする. このとき, $\mathrm{ran}(P_{\mathscr{D}}) = \mathscr{D}$ であり, 作用素の等式

$$P_{\mathscr{D}} = P_{\mathscr{D}}^2, \quad P_{\mathscr{D}} = P_{\mathscr{D}}^* \tag{3.1}$$

が成り立つ. したがって $P_{\mathscr{D}}$ は自己共役作用素となる.

$P_{\mathscr{D}}$ についての等式 (3.1) を抽象化することで, 正射影作用素の一般概念が定義される.

Definition 3.1.2 (正射影作用素)**.** P を $\mathscr{H}$ 上の有界作用素とする. このとき, $P^2 = P$, $P^* = P$ が成り立つとき, P を**正射影作用素**という.

正射影作用素の基本的な性質について述べる.

Proposition 3.1.2. P を正射影作用素とする. このとき次が成り立つ.

(i) $\Psi \in \mathrm{ran}(P)$ ならば, $P\Psi = \Psi$.
(ii) $P \ge 0$, すなわち, P は非負である.
(iii) $\|P\|_{\mathrm{op}} \le 1$. 特に, $P \ne 0$ ならば, $\|P\|_{\mathrm{op}} = 1$.
(iv) $\mathrm{ran}(P)$ は $\mathscr{H}$ の閉部分空間である.
(v) $P \ne 0$ かつ $P \ne I$ ならば, $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$.

Remark 3.1.1. P を $\mathscr{H}$ 上の正射影作用素とする. このとき, $\mathscr{D} := \mathrm{ran}(P)$ とすれば, $\mathscr{D}$ は $\mathscr{H}$ の閉部分空間である. 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ は, P を用いて, $\Psi = P\Psi + (I - P)\Psi$ と表せる. ただし, I は恒等作用素である. $P\Psi \in \mathscr{D}$, $(I - P)\Psi \in \mathscr{D}^\perp$ なので, $P_{\mathscr{D}}\Psi = P\Psi$ である. したがって, $P_{\mathscr{D}} = P$. このことから, 任意の正射影作用素はある閉部分空間上への正射影作用素であることがわかる.

Proposition 3.1.3. $\mathscr{D},\mathscr{F}$ を $\mathscr{H}$ の閉部分空間とする．このとき，

$$P_{\mathscr{D}}P_{\mathscr{F}}=0 \iff \mathscr{D}\perp\mathscr{F}$$

である．

Definition 3.1.3. $\mathscr{H}$ 上の正射影作用素 P,Q が $PQ=0$ となるとき，P と Q は**直交する**という．

3.1.2 スペクトル測度

以下では，$\mathscr{P}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ 上の正射影作用素の全体とする．

Definition 3.1.4 (スペクトル測度)**.** $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ の Borel 集合族，すなわち，$\mathbb{R}^d$ の開集合族を含む最小の σ-加法族とする．E を $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ への写像とする．正射影作用素の族 $\{E(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ が次の条件をみたすとき，これを d 次元の**スペクトル測度** (spectral measure) という．

(E.1) $E(\emptyset)=0$, $E(\mathbb{R}^d)=I$.

(E.2) $B_n\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, $B_n\cap B_m=\emptyset$ $(n\neq m)$, $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ ならば，

$$E(B)=\operatorname*{s-lim}_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}E(B_n)$$

Remark 3.1.2. $\{E(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ をスペクトル測度とする．

(1) (E.2) において，$n\geq 2$ とし，$B_{n+k}=\emptyset$ $(k=1,2,3,\ldots)$ とすれば，

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{n}B_j\right)=\sum_{j=1}^{n}E(B_j),\quad B_j\cap B_k=\emptyset\ (j\neq k)$$

(2) (E.1), (E.2) から，任意の $B_1,B_2\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$E(B_1\cap B_2)=E(B_1)E(B_2) \tag{3.2}$$

が成り立つ．したがって，$\{E(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ は可換な正射影作用素の族になっている．

(3) (E.2) で $B=\mathbb{R}^d$ とすれば，(E.1) から，

$$I=\operatorname*{s-lim}_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}E(B_n) \tag{3.3}$$

が成り立つ．このとき，$B_n\cap B_m=\emptyset$ $(n\neq m)$ なので，(3.2) 式と (E.1) から，$E(B_n)E(B_m)=0$ $(n\neq m)$ となる．したがって，(3.3) 式は，恒等作用素が互いに直交する正射影作用素の和で書かれることを意味する．このことから，$\{E(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ を**単位の分解** (resolution of identity) ともいう．

Example 3.1.1. $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ とする．$L^2(\mathbb{R}^d)$ を

$$(E(B)f)(x):=\chi_B(x)f(x)\qquad(f\in L^2(\mathbb{R}^d),x\in\mathbb{R}^d)$$

と定まる．ただし，χ_B は B の特性関数である，すなわち，

$$\chi_B(x)=\begin{cases}1 & (x\in B)\\ 0 & (x\notin B)\end{cases}$$

このとき，$\{E(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ はスペクトル測度となる ([3, p.138, 例 3.4] 参照)．

3.2 スペクトル定理とスペクトル分解

以下, $\{E(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ をスペクトル測度とする.

3.2.1 積分の記号

任意の $\Psi\in\mathscr{H}$ に対して,

$$\langle\Psi, E(B)\Psi\rangle = \|E(B)\Psi\|^2 \geq 0$$

となる. そこで,

$$\mu_\Psi(B) \coloneqq \langle\Psi, E(B)\Psi\rangle \qquad (B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$$

と定めると, μ_Ψ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の有界な Borel 測度であり, $\mu_\Psi(\mathbb{R}^d) = \|\Psi\|^2$ が成り立つ. $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数 f に対して, 測度 μ_Ψ による f の積分を便宜上

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle\Psi, E(\lambda)\Psi\rangle \text{ または } \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\|E(\lambda)\Psi\|^2$$

と書く. 任意の $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}$ に対して,

$$\mu_{\Psi,\Phi}(B) = \langle\Psi, E(B)\Phi\rangle \qquad (B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$$

と定めると, (E.1), (E.2) より, $\mu_{\Psi,\Phi}$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の有界な複素数値 Borel 測度である. $\mu_{\Psi,\Phi}$ の全変動 $|\mu_{\Psi,\Phi}|\colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\to[0,\infty)$ は

$$|\mu_{\Psi,\Phi}|(B) \coloneqq \sup\left\{\sum_{n=1}^\infty |\mu_{\Psi,\Phi}(B)| \,:\, \{B_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),\ B=\bigcup_{n=1}^\infty B_n,\ B_n\cap B_m=\emptyset\ (n\neq m)\right\}$$

によって定義される[*18]. $|\mu_{\Psi,\Phi}|$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の有界な測度であることに注意する ([34, p.117, Theorem 6.2, p.118, Theorem6,4] 参照). $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数 f が測度 $|\mu_{\Psi,\Phi}|$ に関して可積分, すなわち,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d|\mu_{\Psi,\Phi}|(\lambda) < \infty$$

ならば, Lebesgue-Stieltjes 積分

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\mu_{\Psi,\Phi}(\lambda) \tag{3.4}$$

が存在する. (3.4) 式を

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle\Psi, E(\lambda)\Phi\rangle$$

と書く.

[*18] 全変動の定義は [34, p.116] を参照しているが, 定義自体は [3, p.140] にも記載されている. 一方で, [3, p.140] の定義は無限和ではなく有限和を用いて定義していることに注意されたい.

3.2.2　作用素値汎関数

$\mathbb{R}^d$ 上の任意の Borel 可測関数 f に対して,

$$\mathscr{D}_f := \left\{ \Psi \in \mathscr{H} \,:\, \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle < \infty \right\}$$

とおく. このとき次が成り立つ ([3, p.140, 補題 3.4] 参照).

Lemma 3.2.1. f を $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数とする.

(i) $\mathscr{D}_f$ は $\mathscr{H}$ の部分空間である.

(ii) $E(\{\lambda \in \mathbb{R}^d : |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば, $\mathscr{D}_f$ は $\mathscr{H}$ で稠密である.

(iii) f が有界ならば, $\mathscr{D}_f = \mathscr{H}$.

(iv) 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ と $\Phi \in \mathscr{D}_f$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| d|\mu_{\Psi,\Phi}|(\lambda) < \infty$$

であり,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| d|\mu_{\Psi,\Phi}|(\lambda) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle \right)^{1/2} \|\Psi\|$$

が成り立つ.

次の重要な定理について述べる ([3, p.142, 定理 3.5] 参照).

Theorem 3.2.1. $\mathscr{H}$ 上の作用素 A_f で,

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}(A_f) = \mathscr{D}_f \\ &\langle \Psi, A_f \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle \qquad (\Psi \in \mathscr{H}, \Phi \in \mathscr{D}_f) \end{aligned}$$

をみたすものが唯一つ存在する. この場合 ,

$$\|A_f \Psi\| = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle \right)^{1/2} \qquad (\Psi \in \mathscr{D}_f)$$

が成り立つ.

この A_f のことを記号的に

$$A_f = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

と書く.

Remark 3.2.1. Theorem 3.2.1 から, 対応 $\mathbb{A}\colon f \mapsto A_f$ は, $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数から, $\mathscr{H}$ 上の作用素の空間への写像となっている. 一般に, 関数空間から作用素の空間への写像のことを**作用素値汎関数** (operator-valued functional) といい, 写像 $\mathbb{A}$ は作用素値汎関数の 1 つの例である.

3.2.3 スペクトル定理とスペクトル分解

最初に, 作用素値汎関数 $\mathbb{A}$ の性質について述べる ([3, p.145, 補題 3.7] 参照).

Lemma 3.2.2. f を $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数とする. このとき, 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(A_f)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して, $E(B)\Psi \in \mathrm{dom}(A_f)$ であり, 任意の $\Phi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle E(B)\Phi, E(\lambda)E(B)\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle \Phi, E(\lambda)E(B)\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle E(B)\Phi, E(\lambda)\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに,

$$\langle A_f\Psi, E(B)A_f\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle$$

が成り立つ.

Lemma 3.2.2 を用いると, 次の定理が示せる ([3, p.146, 定理 3.8] 参照).

Theorem 3.2.2. f を $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数とする. このとき次が成り立つ.

(i) 任意の $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して, $E(B)A_f \subset A_f E(B)$.

(ii) $E(\{\lambda \in \mathbb{R}^d : |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば, A_f は 稠密に定義された閉作用素であり, $A_f^* = A_{\overline{f}}$. 特に, f が $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数ならば, A_f は 稠密に定義された閉作用素である.

(iii) f が有界ならば, $\mathrm{dom}(A_f)\mathscr{H}$, A_f は有界であって, $\|A_f\|_{\mathrm{op}} \le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|$, $A_f^* = A_{\overline{f}}$.

(iv) $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 可測関数 g に対して,

$$\mathrm{dom}(A_{fg}) \cap \mathrm{dom}(A_g) = \mathrm{dom}(A_f A_g), \quad A_f A_g \subset A_{fg}.$$

特に, g が有界ならば, $A_g A_f \subset A_f A_g = A_{fg}$.

(v) $|f| = 1$ ならば, A_f はユニタリ作用素である.

(vi) f が実数値関数で $E(\{\lambda \in \mathbb{R}^d : |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば, A_f は自己共役である. 特に, f が $\mathbb{R}^d$ 上の実数値連続関数ならば, A_f は自己共役である.

$d = 1$ の場合を考える. Theorem 3.2.2(vi) において, $f(\lambda) = \lambda$ の場合を考えると,

$$T \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda) \tag{3.5}$$

は自己共役である. 反対に, 任意の自己共役作用素 T が (3.5) 式の表示を持つかについては次の定理がある ([6, p.173, 定理 2.55] 参照).

Theorem 3.2.3 (スペクトル定理)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき, (3.5) 式をみたすような 1 次元のスペクトル測度 $\{E_T(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ が唯一つ存在する.

Definition 3.2.1. Theorem 3.2.3 における $\{E_T(B)\}_{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ を, T の**スペクトル測度**という. また, (3.5) 式のことを T の**スペクトル分解** (spectral resolution) という.

Remark 3.2.2. Theorem 3.2.3 は, $\mathscr{H}$ が有限次元の場合には, エルミート行列が対角化可能であることと本質的に同等である ([3, p.150, 例 3.5] 参照). このことからもわかるように, Theorem 3.2.3 はエルミート行列が対角化可能であることの一般化に相当する定理である.

Example 3.2.1. $w(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ とすると, $L^2(\mathbb{R})$ 上のかけ算作用素 M_w は自己共役となる. M_w のスペクトル測度 E_{M_w} は

$$(E_{M_w}(B)f)(x) = \chi_B f(x) \qquad (B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

で与えられる ([3, p.150, 例 3.6] 参照)

3.2.4 自己共役作用素の関数

T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし, E_T を T のスペクトル測度とする. Theorem 3.2.1 を応用すると, $\mathbb{R}$ 上の Borel 可測関数 f に対して,

$$\mathrm{dom}(f(T)) \coloneqq \left\{ \Psi \in \mathscr{H} \;:\; \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\langle \Psi, E_T(\lambda)\Psi \rangle < \infty \right\}$$
$$\langle \Phi, f(T)\Psi \rangle \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\langle \Phi, E_T(\lambda)\Psi \rangle \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(f(T)), \Phi \in \mathscr{H})$$

となる作用素 $f(T)$ が唯一つ存在する. このとき $f(T)$ は,

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE(\lambda)$$

となるので, $f(T)$ は, T のスペクトル測度 E_T から定まる作用素 A_f である. したがって, $A_f = f(T)$ とし, $d = 1$ の場合の Theorem 3.2.2 が成り立つ. よって, 対応: $T \mapsto f(T)$ は, 自己共役作用素の全体を定義域とする, 作用素値関数と見ることができる. こうして, Theorem 3.2.3 を介して, 自己共役作用素の関数が定義される.

Definition 3.2.2. $f(\lambda) = |\lambda| (\lambda \in \mathbb{R})$ の場合の $f(T)$ を $|T|$ と記し, T の**絶対値**という:

$$|T| \coloneqq \int_{\mathbb{R}} |\lambda| \, dE(\lambda).$$

自己共役作用素とユニタリ作用素の積については次の命題が成り立つ ([3, p.152, 命題 3.11]).

Proposition 3.2.1. T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし, U を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのユニタリ作用素とする. このとき, UTU^* は $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素である.

E_T を T のスペクトル測度とする. このとき, $\widetilde{E}(B) \coloneqq UE_T(B)U^*(B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ と定めると, $\widetilde{E}$ はスペクトル測度であり, $\mathbb{R}$ 上の任意の Borel 可測関数 f に対して,

$$\langle \Psi, Uf(T)U^*\Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\langle \Psi, \widetilde{E}(\lambda)\Phi \rangle \qquad (\Psi \in \mathscr{K}, \Phi \in U \, \mathrm{dom}(f(T))) \tag{3.6}$$

が成り立つ. 特に, $f(\lambda) = \lambda$ の場合を考えると, スペクトル分解の一意性から, $\widetilde{E}$ は UTU^* のスペクトル測度である. また,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\|\widetilde{E}\Phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\|\widetilde{E}U^*\Phi\|^2$$

であることに注意すると, $\mathrm{dom}(f(UTU^*)) = \mathrm{dom}(Uf(T)U^*)$ となるので, これと (3.6) 式から,

$$Uf(T)U^* = f(UTU^*)$$

が成り立つ.

3.2.5 スペクトル測度の台と自己共役作用素のベキ乗

E を $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上のスペクトル測度とする.

$$\mathfrak{C} \coloneqq \{C \subset \mathbb{R}^d : C \text{ は閉集合}, E(C) = I\}$$

とおくと, $\mathfrak{C}$ は空でない集合族である.

$$C_0 \coloneqq \bigcap_{C\in\mathfrak{C}} C$$

とおくと, C_0 は閉集合である. このとき, 任意の $C \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$C \setminus C_0 = C \cap C_0^c = C \cap \left(\bigcup_{D\in\mathfrak{C}} D^c\right) = \bigcup_{D\in\mathfrak{C}} C \cap D^c \subset \bigcup_{D\in\mathfrak{C}} D^c$$

かつ D^c が開集合であることから, Lindelöf の被覆定理 ([7, p.260, 定理 2] 参照) より,

$$C \setminus C_0 \subset \bigcup_k D_k^c$$

となる $D_k^c \in \mathfrak{C}$ がたかだか可算無限個存在する. $E(D_k^c) = 0$ なので, $E(\bigcup_k D_k^c) = 0$. したがって, $E(C \setminus C_0) = 0$ である. 一方で,

$$E(C_0) = E(C \setminus C_0) + E(C_0) = E(C) = I$$

なので, C_0 は, $E(C) = I$ となる閉集合のうちで最小のものであることがわかる. この C_0 を E の**台** (support) といい, $\mathrm{supp}\, E$ と書く.

次の定理は, 自己共役作用素のスペクトル測度の台を特徴付ける定理である ([3, p.154, 定理 3.13] 参照).

Theorem 3.2.4. T を自己共役作用素とし, E_T を T のスペクトル測度とすると,

$$\mathrm{supp}\, E_T = \sigma(T)$$

が成り立つ.

Theorem 3.2.4 の系として次をえる ([3, p.156, 系 3.14] 参照).

Corollary 3.2.1. T を自己共役作用素とし, E_T を T のスペクトル測度とすると,

(i) $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ の空でない閉部分集合である.
(ii) T が下に有界で, $T \geq \gamma(\gamma \in \mathbb{R})$ ならば $\mathrm{supp}\, E_T \subset [\gamma, \infty)$ である.
(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\sigma(T) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta) = \{\lambda\}$ となる $\delta > 0$ が存在するならば $\lambda \in \sigma_p(T)$ である.

Theorem 3.2.4 の応用として次の定理をえる ([3, p.156, 定理 3.15] 参照).

Theorem 3.2.5 (スペクトル写像定理)**.** T を自己共役作用素とし, f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする. このとき,

$$\sigma(f(T)) = \overline{\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}}$$

が成り立つ.

次の定理は, 自己共役作用素に対して (2.1) 式で定義される作用素の自己共役性に関する定理である ([2, p.158, 定理 3.16]).

Theorem 3.2.6. T を自己共役作用素とし, E_T を T のスペクトル測度とする. このとき, $n \geq 2$ となる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, T^n は自己共役であり,

$$T^n = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n \, dE_T(\lambda)$$

が成り立つ.

T が非負の自己共役作用素である場合を考える. このとき, Corollary 3.2.1(ii) から, $\operatorname{supp} E_T \subset [0, \infty)$ である. ここで, 任意の $\alpha > 0$ に対して,

$$f_\alpha(\lambda) \coloneqq \chi_{[0,\infty)}(\lambda)|\lambda|^\alpha \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

と定めると, f_α は実数値連続関数である. したがって, Theorem 3.2.2(iv) から $f_\alpha(T)$ も自己共役である. Theorem 3.2.6 より, $f_n(T) = T^n (n \in \mathbb{N})$ である. そこで,

$$T^\alpha \coloneqq f_\alpha(T) = \int_{[0,\infty)} \lambda^\alpha \, dE_T(\lambda)$$

を T の α **乗**とよぶ. 特に, $\alpha = 1/2$ の場合を T **の平方根**とよぶ[*19].

Remark 3.2.3. T^α は非負の自己共役作用素であり, スペクトル写像定理から

$$\sigma(T^\alpha) = \overline{\{\lambda^\alpha : \lambda \in \sigma(T)\}} \subset [0, \infty)$$

が成り立つ.

T の平方根については次の定理が成り立つ ([3, p.159, 定理 3.17] 参照).

Theorem 3.2.7. T が非負の自己共役作用素ならば, $(T^{1/2})^2 = T$ が成り立つ.

最後に次の問題を考える:

非負の自己共役作用素 T の非負の平方根は一意的に定まるか?

この問いについては肯定的に解決されるが, それを示すための補題を 1 つ準備する ([3, p.159, 補題 3.18] 参照)

Lemma 3.2.3. E を $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上のスペクトル測度とし, $X\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ を Borel 可測とする. また, $E^X(B) \coloneqq E(X^{-1}(B))(B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ とおく. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ:

(i) E^X は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ 上のスペクトル測度である.

*19 非負の自己共役作用素の平方根は, 場の量子論の研究では非常に重要である (詳しくは [4, 5] 参照).

(ii) Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$ と $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ が

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, d|\mu^X_{\Psi,\Phi}| < \infty$$

をみたすとする．ただし，$\mu^X_{\Psi,\Phi} \coloneqq \langle \Psi, E^X(B)\Phi\rangle (B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ である．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(X(\lambda)) \, d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\langle \Psi, E^X(x)\Phi\rangle$$

が成り立つ．

Lemma 3.2.3 を用いることで次の定理をえる ([3, p.160, 定理 3.19] 参照).

Theorem 3.2.8. T を非負の自己共役作用素とする．このとき，非負の自己共役作用素 S が $S^2 = T$ をみたすならば，$S = T^{1/2}$ である．

3.3 強連続 1 パラメータユニタリ群

Definition 3.3.1 ($\mathscr{H}$-値関数)**.** $J \subset \mathbb{R}$ を区間とする．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathscr{H}$ の元を唯一つ定める対応 $\Psi\colon t \mapsto \Psi(t) \in \mathscr{H}$ を J 上の **$\mathscr{H}$-値関数**という．

Definition 3.3.2 (強連続, 弱連続)**.** $J \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$t_0 \in J$ とする．また，$\Psi\colon J \to \Psi(t) \in \mathscr{H}$ を $\mathscr{H}$-値関数とする．

(i) $\|\Psi(t_0+\varepsilon) - \Psi(t_0)\| \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ が成り立つとき，$\Psi(t)$ は $t = t_0$ で**強連続** (strongly continuous) であるという．また，J のすべての点で $\Psi(t)$ が強連続のとき，$\Psi(t)$ は J **上で強連続**であるという．

(ii) $\text{w-}\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi(t_0+\varepsilon) = \Psi(t_0)$ が成り立つとき，$\Psi(t)$ は $t = t_0$ で**弱連続** (weakly continuous) であるという．また，J のすべての点で $\Psi(t)$ が弱連続のとき，$\Psi(t)$ は J **上で弱連続**であるという．

Remark 3.3.1. $\Psi(t)$ が強連続ならば弱連続である．だが，逆は一般には成り立たない．

Definition 3.3.3 (強微分, 弱微分)**.** $J \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$t_0 \in J$ とする．また，$\Psi\colon J \to \Psi(t) \in \mathscr{H}$ を $\mathscr{H}$-値関数とする．

(i) 極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Psi(t_0+\varepsilon) - \Psi(t_0)}{\varepsilon}$$

が存在するとき，$\Psi(t)$ は $t = t_0$ で**強微分可能** (strongly differentiable) であるという．また，J のすべての点で $\Psi(t)$ が強連続のとき，$\Psi(t)$ は J **上で強微分可能**であるといい，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Psi(t+\varepsilon) - \Psi(t)}{\varepsilon} = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \Psi'(t) \tag{3.7}$$

と表し，$\Psi(t)$ の**強微分**という．

(ii) (3.7) 式の左辺が弱収束の意味で存在するとき，$\Psi(t)$ は**弱微分可能** (weakly differentiable) であるという．

Definition 3.3.4. $\{W(t)\}_{t\in J}$ を $\mathscr{H}$ 上の有界作用素の族とすると, 対応 W は J から $\mathscr{H}$ 上の有界作用素からなる空間 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ への写像を定める. このような関数を J 上の $\mathscr{B}(\mathscr{H})$-値関数という. 任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して, $\Psi(t) = W(t)\Psi$ は $\mathscr{H}$-値関数を定義する. この $\Psi(t)$ が J 上で強連続であるとき, W は J **上で強連続**であるという. これは, 言い換えれば, 任意の $t \in J$ に対して,

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} W(t+\varepsilon) = W(t)$$

が成り立つということである.

Definition 3.3.5. T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし, E_T を T のスペクトル測度とする. $t \in \mathbb{R}$ に対して, $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ と定めると, $|f_t| = 1$ となるので, Theorem 3.2.2(v) から, 作用素 $f_t(T)$ はユニタリ作用素となる. このユニタリ作用素を記号的に e^{itT} と表す.

$$e^{itT} := \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\, dE(\lambda)$$

次の定理は, ユニタリ作用素の族 $\{e^{itT}\}_{t\in\mathbb{R}}$ の基本的な性質について述べた定理である ([3, p.174, 定理 4.5] 参照).

Theorem 3.3.1. $U\colon \mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ を $U(t) = e^{itT}$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

(i) $U(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続であり,

$$U(t+s) = U(t)U(s) = U(s)U(t) \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

(ii) 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ に対して, $U(t)\Psi$ は強微分可能であり,

$$\frac{dU(t)\Psi}{dt} = iU(t)T\Psi = iTU(t)\Psi$$

特に,

$$T\Psi = -i \lim_{t\to 0} \frac{U(t)\Psi - \Psi}{t} \tag{3.8}$$

(iii) $\mathrm{dom}(T)$ は $U(t)$ によって次のように特徴づけられる.

$$\mathrm{dom}(T) = \left\{ \Psi \in \mathscr{H} \;:\; \lim_{t\to 0} \frac{U(t)\Psi - \Psi}{t} \text{が存在する} \right\}$$

Theorem 3.3.1 におけるユニタリ作用素の族 $\{e^{itT}\}_{t\in\mathbb{R}}$ のいくつかの性質を抽象化することにより, 次の重要な一般概念に到達する[*20].

Definition 3.3.6 (強連続 1 パラメータユニタリ群)**.** $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素の族とする. このとき, $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が次の性質をみたすとき, **強連続 1 パラメータユニタリ群** (strongly continuous one parameter unitary group) という.

(U.1) **(強連続性)** $U(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である.
(U.2) **(群特性)** 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して, $U(t+s) = U(t)U(s)$.

[*20] 余談だが, 高橋眞映先生 (山形大学名誉教授) が "優れた定理はそれ自身定義となり得る" ということをおっしゃっていた. この言葉を信じると, Definition 3.3.6 を見るに, Theorem 3.3.1(i) は優れた定理だと言えると思われる.

Remark 3.3.2. $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を強連続 1 パラメータユニタリ群とする.

(1) (U.2) から, $U(0) = I$.
(2) (U.2) と $U(s+t) = U(t+s)$ から, $U(s)U(t) = U(t)U(s)$.
(3) (U.2) において, $s = -t$ とすれば, $I = U(t)U(-t)$ なので, $U(-t) = U(t)^{-1} = U(t)^*$.

Theorem 3.3.1 から, 自己共役作用素 T から定まる ユニタリ作用素の族 $\{e^{itT}\}_{t\in\mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメータユニタリ群である. これを T **によって生成される強連続 1 パラメータユニタリ群**という. この場合, T をその**生成子** (generator) という.

次の定理は, 任意の強連続 1 パラメータユニタリ群がある自己共役作用素で生成されることを主張する定理である ([3, p.174, 定理 4.6] 参照).

Theorem 3.3.2 (Stone の定理)**.** $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を強連続 1 パラメータユニタリ群とする. このとき, $U(t) = e^{itT}$ $(t \in \mathbb{R})$ となる自己共役作用素 T が唯一つ存在する.

Stone の定理の証明 ([3, pp.176–177] 参照) には次の定理を用いる ([3, p.174, 定理 4.7] 参照).

Theorem 3.3.3. $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を強連続 1 パラメータユニタリ群とする. 稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $U(t)$ が $\mathscr{D}$ を不変にする, すなわち, $U(t)(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$ が成り立つとする. さらに, 任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して, $U(t)\Psi$ は強微分可能とする. $\mathscr{H}$ 上の作用素 A を

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(A) &\coloneqq \mathscr{D} \\ A\Psi &= -i \lim_{t\to 0} \frac{(U(t) - I)\Psi}{t} \qquad (\Psi \in \mathscr{D}) \end{aligned}$$

で定める. このとき, A は対称作用素であり, 本質的に自己共役である. さらに, $U(t) = e^{it\overline{A}}$ $(t \in \mathbb{R})$ が成り立つ.

Theorem 3.3.2 と Theorem 3.3.3 から次の定理をえる ([3, p.177, 定理 4.8] 参照).

Theorem 3.3.4. $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を強連続 1 パラメータユニタリ群とし, A をその生成子とする. 稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathrm{dom}(A)$ が存在し, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $U(t)$ は $\mathscr{D}$ を不変にするとする. このとき, A は $\mathscr{D}$ 上で本質的に自己共役である.

3.4 可換性と強可換性

Definition 3.4.1 (交換子)**.** T, S を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする. 作用素 $[T, S]$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}([T,S]) &\coloneqq \mathrm{dom}(TS) \cap \mathrm{dom}(ST) \\ [T,S]\Psi &\coloneqq TS\Psi - ST\Psi \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}([T,S])) \end{aligned}$$

これを T と S の**交換子** (commutator) という.

容易にわかるように, 作用素の等式 $[T, S] = -[S, T]$ が成り立つ.

Definition 3.4.2 (可換)**.** 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}([T, S])$ に対して, $[T, S]\Psi = 0$ となるとき, T と S は**可換**であるという.

Definition 3.4.3 (強可換)**.** T, S を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし, E_T, E_S を, それぞれ, T, S のスペクトル測度とする．このとき, 任意の $B, C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して, $E_T(B)$ と $E_S(C)$ が可換であるとき, T と S は**強可換** (strongly commuting) であるという．また, n 個の自己共役作用素の組 $\{T_1, \ldots, T_n\}$ は, それらの任意の 2 つが強可換であるとき, 強可換であるという．

Example 3.4.1. $x = (x_1, \ldots x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して, $w_j(x) \coloneqq x_j$ $(j = 1, \ldots, d)$ と定める．このとき, Example 3.2.1 から, $j, k = 1, \ldots, d$ に対して, かけ算作用素 M_{w_j} と M_{w_k} は強可換である ([3, p.179, 例 4.8] 参照).

次の定理は, 自己共役作用素のスペクトル測度をそのレゾルヴェントを用いて表す公式である ([3, p.180, 定理 4.9]).

Theorem 3.4.1 (Stone の公式)**.** T を自己共役作用素とし, E_T を T のスペクトル測度とする．このとき, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対して,

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left((T - \lambda - i\varepsilon)^{-1} - (T - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \right) d\lambda = \frac{1}{2} \left(E_T([a, b]) + E_T((a, b)) \right) \tag{3.9}$$

が成り立つ.

Remark 3.4.1. $E_T(\{a\}) = E_T(\{b\}) = 0$ ならば, (3.9) 式の右辺は $E_T((a, b))(= E_T([a, b]))$ に等しい.

Theorem 3.4.1 から, T から定まる作用素

$$M_{a,b}(T) \coloneqq \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left((T - \lambda - i\varepsilon)^{-1} - (T - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \right) d\lambda$$

が存在し,

$$M_{a,b}(T) = \frac{1}{2} \left(E_T([a, b]) + E_T((a, b)) \right) \tag{3.10}$$

が成り立つ．$\lambda \geq a$ ならば, $E_T([a, \lambda])$ は λ に関して右連続となるので ([3, p.161, 練習問題 11 (iii)] 参照), (3.10) 式から

$$E_T(\{a\}) = 2 \operatorname*{s-lim}_{\delta \to +0} M_{a,a+\delta}(T)$$

をえる.

$$E_T([a, b]) + E_T((a, b)) = 2E_T((a, b]) + E_T(\{a\}) - E_T(\{b\})$$

なので,

$$2E_T((a, b]) = M_{a,b}(T) + \operatorname*{s-lim}_{\delta \to +0} \left(M_{b,b+\delta}(T) - M_{a,a+\delta}(T) \right) \tag{3.11}$$

をえる．これは, T のスペクトル測度 E_T が T から一意的に決まることを示す.

強可換性に関するいくつかの定理を述べる．作用素解析と (3.11) 式を用いることで, 次の定理を示すことができる ([3, p.181, 定理 4.10] 参照).

Theorem 3.4.2. T, S を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき, 次の条件は同値である.

(i) T と S は強可換である.

(ii) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $e^{iaT}e^{ibS} = e^{ibS}e^{iaT}$.

(iii) 任意の $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して, $R_z(T)R_w(S) = R_w(S)R_z(T)$.

Theorem 3.4.2 から次の定理をえる ([3, p.182, 定理 4.11] 参照).

Theorem 3.4.3. T, S を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき, T と S は強可換ならば, 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(TS) \cap \mathrm{dom}(T)$ に対して, $\Psi \in \mathrm{dom}(ST)$ であって, $[T, S]\Psi = 0$ が成り立つ. 特に, T と S は可換である.

Remark 3.4.2. Theorem 3.4.3 の逆は, $\mathrm{dom}([T, S])$ が稠密であっても, 一般には成り立たない.

Theorem 3.4.2, Theorem 3.4.3 から次の系をえる ([3, p.183] 参照).

Corollary 3.4.1. T, S を $\mathscr{H}$ 上の有界な自己共役作用素とする. このとき, T と S が強可換であることの必要十分条件は T と S が可換となることである.

4 Fourier 変換

この節では, Fourier 変換の一般について述べる．なお, この節の内容についても新井朝雄氏の著書 [3] を参照している．

4.1 急減少関数の空間と Fourier 変換

4.1.1 急減少関数の空間

以下, 無限回微分可能な $\mathbb{R}^d$ 上の関数からなる集合を $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ と表す．

Definition 4.1.1 (急減少関数)**.** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき f が, 任意の $m \in \mathbb{N}$ と多重指数 α に対して,

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m \partial^\alpha f(x) = 0$$

をみたすとき, f を **急減少関数**といい, $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数からなる集合を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ と表す．

次の命題は, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の基本的な性質についてである．

Proposition 4.1.1. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ は各点での和とスカラー積に関してベクトル空間となる．

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \coloneqq \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \text{ が } \mathbb{R}^d \text{ のコンパクト部分集合} \right\}$$

とおくと,

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \tag{4.1}$$

が成り立つ．したがって, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密である．

4.1.2 Fourier 変換

Definition 4.1.2 (Fourier 変換, 逆 Fourier 変換)**.** $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき, $\mathcal{F}f$ を

$$(\mathcal{F}f)(k) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ik\cdot x}\, dx \qquad (k \in \mathbb{R}^d) \tag{4.2}$$

と定め, f の **Fourier 変換** (Fourier transform) という．ただし, $k \cdot x$ は $k = (k_1, \ldots, k_d), x = (x_1, \ldots x_d) \in \mathbb{R}^d$ の Euclid 内積, すなわち, $k \cdot x \coloneqq \sum_{j=1}^d k_j x_j$ である．また, $\overline{\mathcal{F}}f$ を

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(k) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ik\cdot x}\, dx \qquad (k \in \mathbb{R}^d)$$

と定め, f の**逆 Fourier 変換** (inverse Fourier transform) という．

$\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$ については次の命題が成り立つ．

Proposition 4.1.2. $\mathcal{F}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ作用素であって, $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ が成り立つ．

Proposition 4.1.2 から,

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$$

が成り立つことがわかる.

Definition 4.1.3. Proposition 4.1.2, (4.1), [3, 定理 2.8] から, $\mathcal{F} \subset \widehat{\mathcal{F}}$ となる $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ作用素 $\widehat{\mathcal{F}}$ が唯一つ存在する. この $\widehat{\mathcal{F}}$ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ **上の Fourier 変換**という. また, $\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ **上の逆 Fourier 変換**という.

以下では, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Fourier 変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ も単に $\mathcal{F}$ と書く. $\mathcal{F}$ の構成方法から, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する作用 $\mathcal{F}f$ がどのような形をとるかは自明ではない. しかしながら, 以下で述べる定理から, $\mathcal{F}f$ は (4.2) 式のある種の一般化として与えられる.

Theorem 4.1.1. 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|(\mathcal{F}f)(k) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{|x|\le R} f(x)e^{-ik\cdot x}\,dx\right|^2 dk = 0 \tag{4.3}$$

が成り立つ. さらに, 任意の $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|(\mathcal{F}^{-1}g)(x) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{|k|\le R} g(k)e^{ik\cdot x}\,dk\right|^2 dx = 0 \tag{4.4}$$

が成り立つ.

Remark 4.1.1. (4.3), (4.4) は, それぞれ, 積分が R について**平均収束**している, すなわち,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_R f)(x) &\coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{|x|\le R} f(x)e^{-ik\cdot x}\,dx \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}^d))\\ (\mathcal{F}_R^{-1} g)(x) &\coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{|k|\le R} g(k)e^{ik\cdot x}\,dk \qquad (g \in L^2(\mathbb{R}^d))\end{aligned}$$

と置くと, $\|\mathcal{F}_R f - \mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$, $\|\mathcal{F}_R^{-1} g - \mathcal{F}^{-1}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(R \to \infty)$ となっていることを意味している.

4.2 運動量作用素

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 T を次で定める.

$$\mathrm{dom}(T) \coloneqq \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \quad Tf \coloneqq \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} f \qquad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)) \tag{4.5}$$

このとき, T は稠密に定義された対称作用素ではあるが自己共役ではない. 実際,

$$u(x) \coloneqq (1 + |x|^2)^{(-n/4)-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

と定めると, $u \in \mathrm{dom}(T^*)$ ではあるが $u \notin \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ となるからである. そこで, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素を次で定義する.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dom}(P_{j,1}) \coloneqq \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, k_j \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \\
&(P_{j,1}f)(x) \coloneqq \mathcal{F}^{-1}[k_j \mathcal{F} f](x) \qquad (f \in \mathrm{dom}(P_{j,1})) \qquad (4.6)\\
&\mathrm{dom}(P_{j,2}) \coloneqq \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, \exists g \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \forall h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle g, h\rangle = \langle f, Th\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}\} \\
&(P_{j,2}f)(x) \coloneqq g(x) \qquad (f \in \mathrm{dom}(P_{j,2})) \qquad (4.7)\\
&\mathrm{dom}(P_{j,3}) \coloneqq \mathrm{dom}(\overline{T}) \\
&(P_{j,3}f)(x) \coloneqq (\overline{T}f)(x) \qquad (f \in \mathrm{dom}(P_{j,3})) \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

このように定めた $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 (4.6), (4.7), (4.8) については, 次の定理が成り立つ.

Theorem 4.2.1. $P_{j,1} = P_{j,2} = P_{j,3}$ が成り立つ. また, (4.5) 式で定義される $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 T は本質的に自己共役である.

Definition 4.2.1 (運動量作用素)**.** $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 P_j を

$$\mathrm{dom}(P_j) \coloneqq \mathrm{dom}(P_{j,3}), \quad P_j \coloneqq P_{j,3}$$

と定める. P_j を j **番目の運動量作用素**[*21] という.

Remark 4.2.1. Theorem 4.2.1 から, 運動量作用素 P_j は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素である.

4.3 一般化された偏微分作用素と一般化された Laplacian

4.3.1 一般化された偏微分作用素

$j = 1, \ldots, d$, $t \in \mathbb{R}$ に対して, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 $U_j(t)$ を

$$\left(U_j(t)f\right)(x) \coloneqq f(x_1, \cdots, x_j + t, \cdots, x_d)$$

と定めると, $U_j(t)$ はユニタリ作用素であり,

$$U_j(t+s) = U_j(t)U_j(s) = U_j(s)U_j(t) \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. また, 任意の $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して, 対応 $t \mapsto U_j(t)f$ は強連続である. ここで, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密なので, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して, 対応 $t \mapsto U_j(t)f$ は強連続である. したがって, 各 $j = 1, \ldots, d$ に対して, $\{U_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群[*22] となる. したがって, Stone の定理から, 各 $j = 1, \ldots, d$ に対して,

$$U_j(t) = e^{itT_j}$$

となる $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素 T_j が存在する.

次に T_j の具体的な形を求める. 任意の $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して, (3.8) 式から,

$$\langle f, T_j g\rangle = -i \int_{\mathrm{supp}\, f} \overline{f(x)} \frac{g(x_1, \cdots, x_j + t, \cdots, x_d) - g(x)}{t}\, dt$$

---

*21 名前の由来については [3, p.220, 例 6.2] を参照.

*22 $\{U_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ のことを**並進ユニタリ群**という.

平均値の定理から,

$$\left|\frac{g(x_1,\cdots,x_j+t,\cdots,x_d)-g(x)}{t}\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial_j g(x)|$$

となる. ただし,

$$\partial_j g(x) \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_j}g(x)$$

である. Lebesgue の優収束定理から,

$$\langle f, T_j g\rangle = -i\int_{\mathrm{supp}\, f}\overline{f(x)}\,\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)\,dt = \langle f, -i\partial_j g\rangle$$

が成り立つ. ゆえに, $T_j g = -i\partial_j g$ をえる. 以上のことから, $-i\partial_j \subset T_j$ が成り立つ. 明らかに, $U_j(t)$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を不変にするので, Theorem 3.3.4 から, $-i\partial_j$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役である. そこで,

$$D_j \coloneqq \overline{\partial_j} \tag{4.9}$$

と定めると, $T_j = -iD_j$ が成り立ち,

$$U_j(t) = e^{it(-iD_j)} \qquad (t\in\mathbb{R}, j=1,\ldots,d)$$

をえる.

Definition 4.3.1 (一般化された偏微分作用素)**.** (4.9) 式で定義される作用素 D_j を**一般化された偏微分作用素** (generalized partial differential operator) という.

Remark 4.3.1. 一般化された偏微分作用素の $-i$ 倍は自己共役である.

4.3.2 一般化された Laplacian

Definition 4.3.2 (一般化された Laplacian)**.** 一般化された偏微分作用素 D_j を用いて, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 Δ を

$$\mathrm{dom}(\Delta) \coloneqq \bigcap_{j=1}^d \mathrm{dom}(D_j^2), \quad \Delta \coloneqq \sum_{j=1}^d D_j^2$$

で定義する. Δ を**一般化された Laplacian**(generalized Laplacian) という.

一般化された Laplacian については次の定理が成り立つ ([3, p.201, 定理 5.11] 参照).

Theorem 4.3.1. L^2 空間上の Fourier 変換を $\mathcal{F}$ とすると,

$$\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^* = -M_w$$

が成り立つ. ただし, $-M_w$ は, 関数 $w(k)=k^2$ によるかけ算作用素である. したがって, Δ は自己共役であり, $-\Delta \ge 0$ である. さらに,

$$\sigma(-\Delta) = [0,\infty), \quad \sigma_p(-\Delta) = \emptyset$$

が成り立つ.

5　抽象的な量子力学の定式化

5.1　量子力学の公理

ここでは, 抽象的な量子力学の公理[*23] と確率論との関係について述べる.

Axiom QM 1. 量子系の**状態** (state) は可分な複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の単位ベクトルによって表される. このベクトルを**状態ベクトル** (state vector) あるいは単に状態という. ただし, $|\alpha| = 1$ となる任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, 状態ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ と $\alpha\Psi \in \mathscr{H}$ は同一の状態を表すものとする.

Axiom QM 1 における Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ のことを**状態空間**という.

Example 5.1.1. 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中を運動する N 個の非相対論的粒子の状態を記述する Hilbert 空間として, $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ が用いられる.

Axiom QM 2. **物理量**–**観測可能量**あるいは**オブザーヴァブル** (observable) ともいう–は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素によって表される.

Remark 5.1.1. Axiom QM 2 は, $\mathscr{H}$ 上の任意の自己共役作用素が物理量であることを主張するものではない.

状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ における物理量 T の観測値は確率的に分布するので, それはある確率変数の値であると考えるのが自然である. この確率変数を T_Ψ とし, それが定義されている確率空間を $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$ とする. これに対して, 次の公理が要請される.

Axiom QM 3. T を物理量とする.

(i) 任意の Borel 集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して, $T_\Psi \in B$ となる確率, すなわち, 状態 Ψ における T の観測値が B に入る確率を $P(T_\Psi \in B)$ とすれば, $P(T_\Psi \in B) = \|E_T(B)\Psi\|^2$ である. ただし, E_T は T のスペクトル測度である.

(ii) 観測によって, T の固有値 λ が得られたとすれば, 観測直後の状態は, λ に属する T の固有ベクトルによって記述される状態になる.

Remark 5.1.2. (1) 状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して, 関数 $\mathbb{P}\colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \|E_T(B)\Psi\|^2 \in [0, \infty)$ は確率測度となる. 実際, Proposition 3.1.2(iii) から, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ とすると, $\|E_T(B)\Psi\| \leq \|\Psi\|$ $(\Psi \in \mathscr{H})$ なので, 状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して, $\|E_T(B)\Psi\|^2 \leq 1$ となる. また, $E_T(\mathbb{R}) = I$ なので, 状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して, $\|E_T(\mathbb{R})\Psi\|^2 = 1$ となる. スペクトル測度の定義から完全加法性も成り立つので, 関数 $\mathbb{P}$ は確率測度である.

(2) Axiom QM 3(i) は, 言い換えれば, T_Ψ の分布 P^{T_Ψ} が $\|E_T(\cdot)\Psi\|^2$ に等しいことを要請するものである.

Definition 5.1.1. 確率変数 T_Ψ の期待値, すなわち, 状態 Ψ において, 物理量 T を観測したときの期待値

[*23] 公理 (axiom) とよんではいるが, ここで言う公理は数学的な意味での公理ではないことに注意されたい.

$E[T_\Psi]$ は

$$E[T_\Psi] \coloneqq \int_\Omega T_\Psi(\omega)\, dP(\omega) \tag{5.1}$$

によって定義される.

(5.1) 式は次のように書き換えることが出来る ([3, p.213, 命題 6.1] 参照).

Proposition 5.1.1. 任意の状態 $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ に対して,

$$E[T_\Psi] = \langle \Psi, T\Psi \rangle \tag{5.2}$$

が成り立つ.

Remark 5.1.3. T をスペクトル分解を用いて表すと,

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_T(\lambda)$$

となる. したがって, (5.2) 式から, 期待値 $E[T_\Psi]$ は

$$E[T_\Psi] = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\|E_T(\lambda)\Psi\|^2$$

と表される.

Axiom QM 3 は単独の物理量の観測に関するものであるが, 通常の量子系には複数の物理量が存在しうる. 複数の物理量の観測についての公理は強可換性を用いて次のように与えられる.

Axiom QM 4. 物理量 $T_1, \ldots, T_n$ は強可換であるとする. このとき, 状態 Ψ において, これらを観測したとき, $T_1, \ldots, T_n$ の観測値がそれぞれ, Borel 集合 $B_1, \ldots, B_n$ に入る確率は $\|E_{T_1}(B_1) \cdots E_{T_n}(B_n)\Psi\|^2$ によって与えられる. さらに, $T_{j,\Psi}$ を状態 Ψ における T_j の観測値を表す確率変数とするれば, 任意の n 次元 Borel 集合 $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して, $(T_{1,\Psi}, \ldots, T_{n,\Psi}) \in B$ である確率は, $\|E_{T_1} \otimes \cdots \otimes E_{T_n}\Psi\|^2$ に等しい. ただし, $E_{T_1} \otimes \cdots \otimes E_{T_n}$ は, $E_{T_1}, \ldots, E_{T_n}$ による直積測度 (直積測度の定義については, [34, Chapter 8] 参照) である.

一般に, 量子系の全エネルギーを記述する自己共役作用素を**ハミルトニアン** (Hamiltonian) という. 量子力学的状態の時間発展の法則は, Hamiltonian H と H によって生成される強連続 1 パラメータユニタリ群を用いて定式化される ([3, pp.231–232] 参照).

Axiom QM 5 (状態の時間発展)**.** $\mathscr{H}$ を状態空間とし, H を量子系の Hamiltonian とする. 状態の時間発展は, 自己共役作用素 $-H/\hbar$ によって生成される強連続 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{-itH/\hbar}\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって記述される. 時刻 t_0 の状態を Ψ とすれば, 時刻 t の状態は, この間に系に対して観測がされない限り, $e^{-i(t-t_0)H/\hbar}\Psi$ によって与えられる.

5.2 Schrödinger 方程式と Schrödinger 描像

ここでは, 量子系の時間発展に関する見方について述べる. そのために, 以下では H を量子系の Hamiltonian とする. 任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(H)$ に対して,

$$\Psi(t) \coloneqq e^{-itH/\hbar}\Psi \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{5.3}$$

とすると, Theorem 3.3.1 から, $\Psi(t)$ は強微分可能であり,

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t) \tag{5.4}$$

$$\Psi(0) = \Psi \tag{5.5}$$

が成り立つ. (5.4) 式は状態の時間発展を微分方程式の形で表したものであり, (5.5) 式は初期条件である.

Definition 5.2.1 (時間に依存する Schrödinger 方程式)**.** $\mathscr{H}$ 上の (自己共役とは限らない) 作用素 H に対して定義される微分方程式 (5.4) を**時間に依存する (抽象)Schrödinger 方程式** (time-dependent Schrödinger equation) という. ただし, この場合, (5.4) は, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\Psi(t) \in \mathrm{dom}(H)$ であることも主張として含んでいるとする.

H が自己共役の場合を考える. この場合, Schrödinger 方程式 (5.4) の解で, 初期条件 (5.5) $\Psi \in \mathrm{dom}(H)$ をみたすものとして, (5.3) 式で定義される, $\mathscr{H}$-値関数 $\Psi(t)$ があるということである. つまり, Schrödinger 方程式 (5.4) の解の存在がいえたわけである.

Definition 5.2.2 (時間に依存しない Schrödinger 方程式)**.** H を Hamiltonin とする. H の固有ベクトル方程式

$$H\Psi = E\Psi \qquad (E \in \mathbb{R}, \Psi \in \mathrm{dom}(H)) \tag{5.6}$$

を**時間に依存しない Schrödinger 方程式**あるいは**定常状態に対する Schrödinger 方程式**という. また, (5.6) の解, すなわち, 固有値 E に属する固有ベクトルを**エネルギー E の固有状態**という.

Remark 5.2.1. Ψ_E をエネルギー E の固有状態とし,

$$\Psi_E(t) := e^{-itE/\hbar}\Psi_E \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{5.7}$$

とおくと, (5.7) は $\Psi_E(0) = \Psi_E$ となる (5.4) の解である. この型の解を**定常状態**という. 定常状態 $\Psi_E(t)$ は, エネルギー E の固有状態であって, $E \neq 0$ ならば, 時間に関して周期 $2\pi\hbar/E$ で振動する $\mathscr{H}$-値関数であることがわかる.

時間に依存する Schrödinger 方程式の解の一意性については, 次の命題がある ([3, p.234, 命題 6.9] 参照).

Proposition 5.2.1. H をエルミート作用素とし, $\Psi \in \mathrm{dom}(H)$ とする. このとき, Schrödinger 方程式 (5.4) 式の解で (5.5) 式をみたすものが存在するならば, それは唯一つに限られる.

Proposition 5.2.1 とすでに述べたことから, 次の定理をえる ([3, p.234, 定理 6.10] 参照).

Theorem 5.2.1. H を自己共役作用素とし, $\Psi \in \mathrm{dom}(H)$ とする. このとき, (5.3) 式によって定義される $\mathscr{H}$-値関数 $\Psi(t)$ は, (5.5) 式を初期条件とする Schrödinger 方程式 (5.4) の唯一つの解である.

Axiom QM 6 (量子系の時間発展)**.** 量子系の時間発展は, Schrödinger 方程式または強連続 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{itH/\hbar}\}_{t\in\mathbb{R}}$ に基づいて, 状態の時間発展ととらえる.

Axiom QM 6 のような量子系の時間発展の見方を **Schrödinger 描像** (Schrödinger picture) [*24] という.

[*24] この他の量子系の時間発展の見方として, **Heisenberg 描像** (Heisenberg picture) というものもあるが, ここでは触れないでおく. 詳しくは [3, p.238–p.239] を参照されたい.

Example 5.2.1 (自由粒子系の時間発展). d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ を運動する, 質量 $m > 0$ の 1 個の非相対論的な自由粒子からなる量子系の時間発展を考える. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 H_0 を

$$H_0 \coloneqq -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \tag{5.8}$$

で定める. ただし, Δ は一般化された Laplacian である. (5.8) 式で定義される作用素を**自由ハミルトニアン** (free Hamiltonian) という. Theorem 4.3.1 から, 自由 Hamiltonian H_0 は自己共役作用素である. 時刻 t での状態を $\Psi(t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とすると, Theorem 5.2.1 から, 時間に依存する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(t) \tag{5.9}$$

と書ける. H_0 が自己共役であることに注意すると, 方程式 (5.9) の解 $\Psi(t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ で $\Psi(0) = \Psi \in \mathrm{dom}(H_0)$ をみたすものは

$$\Psi(t) = e^{-\frac{itH_0}{\hbar}}\Psi \tag{5.10}$$

によって与えられる. (5.10) 式の右辺については次の結果が知られている ([3, p.236, 定理 6.11] 参照).

Theorem 5.2.2. (i) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して, e^{isH_0} は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への全単射である.

(ii) 任意の $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ と $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$(e^{-\frac{itH_0}{\hbar}}\Psi)(x) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{d\pi i\varepsilon(t)}{4}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{m}{2t\hbar}|x-y|^2}\Psi(y)\,dy$$

が成り立つ. ただし,

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

である.

(iii) 任意の $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$(\mathcal{S}_R\Psi)(x) \coloneqq \left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{d\pi i\varepsilon(t)}{4}} \int_{|y|\le R} e^{i\frac{m}{2t\hbar}|x-y|^2}\Psi(y)\,dy \qquad (\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d))$$

とおくと, $\mathcal{S}_R\Psi$ は $e^{-itH_0/\hbar}\Psi$ に平均収束する, すなわち,

$$\|e^{-itH_0/\hbar}\Psi - \mathcal{S}_R\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0 \qquad (R \to \infty)$$

が成り立つ.

6 古典力学と量子力学

この節では, 古典力学の量子化, 特に, Weyl 量子化について述べる.

6.1 古典力学

古典力学における状態空間とは**相空間** (phase space) $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^d$ のことである. また, 物理量は $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^d$ 上の実数値連続関数のことを指す. Hamiltonian $H(x,\xi)$ が与えられたとき, $(x(t),\xi(t))$ は Hamilton 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \xi_j}(x(t),\xi(t)) \\ \dfrac{d\xi_j}{dt}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}(x(t),\xi(t)) \end{cases} \tag{6.1}$$

をみたすとする.

6.1.1 古典系における物理量の時間発展

$a \in C^\infty(\mathrm{T}^*\mathbb{R}^d)$ とし, $(x(t),\xi(t))$ を Hamilton 方程式の解とする[*25]. このとき, (6.1) から,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(x(t),\xi(t)) &= \sum_j \left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial a}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt} \right)(x(t),\xi(t)) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial \xi_j} - \frac{\partial a}{\partial \xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} \right)(x(t),\xi(t)) = \{a,H\}_P(x(t),\xi(t)) \end{aligned} \tag{6.2}$$

となる. ここで,

$$\{a,H\}_P := \sum_j \left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial \xi_j} - \frac{\partial a}{\partial \xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} \right)$$

をポアソン括弧という.

$C^\infty(\mathrm{T}^*\mathbb{R}^d)$ 上でポアソン括弧を定義すると次の命題が成り立つ.

Proposition 6.1.1. $(C^\infty(\mathrm{T}^*\mathbb{R}^d), \{\cdot,\cdot\}_P)$ は Lie 代数をなす.

Definition 6.1.1 (保存量)**.** $a(x,\xi)$ を (時間に依存しない) 物理量とする. このとき, 任意の古典軌道 $(x(t),\xi(t))$ に対して, $a(x(t),\xi(t))$ が定数となるとき, $a(x,\xi)$ を**保存量**という.

(6.2) 式から次の命題をえる.

Proposition 6.1.2. $\{a,H\}_P = 0$ ならば a は保存量である.

Proof. 任意の古典軌道 $(x(t),\xi(t))$ に対して, (6.2) 式から,

$$\frac{d}{dt}a(x(t),\xi(t)) = \{a,H\}_P(x(t),\xi(t)) = 0$$

となるので, $a(x(t),\xi(t))$ は定数. したがって, a は保存量となる. □

[*25] 古典軌道になっている.

6.2 量子力学

T を物理量とすると, Proposition 5.1.1 から, 状態 $\Psi \in \mathrm{dom}(T)$ における期待値は,

$$\langle \Psi, T\Psi \rangle$$

によって与えられる. また, H を Hamiltonian とし, $\Psi(t) \in \mathrm{dom}(H)$ $(t \in \mathbb{R})$ とする. このとき, H と $\Psi(t)$ が (5.4), (5.5) をみたすならば, Theorem 5.2.1 から,

$$\Psi(t) = e^{-itH/\hbar}\Psi$$

となる. ここで, $\langle \Psi(t), T\Psi(t) \rangle$ の 1 階微分を考えると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \Psi(t), T\Psi(t) \rangle &= \left\langle \Psi(t), \frac{1}{i\hbar}TH\Psi(t) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{i\hbar}H\Psi(t), T\Psi(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi(t), \frac{1}{i\hbar}(TH - HT)\Psi(t) \right\rangle = \left\langle \Psi(t), \frac{1}{i\hbar}[T, H]\Psi(t) \right\rangle\end{aligned}$$

となる. 一方で, 別の見方をすると,

$$\langle \Psi(t), T\Psi(t) \rangle = \langle \Psi, T(t)\Psi \rangle, \quad T(t) \coloneqq e^{itH/\hbar}Te^{-itH/\hbar}$$

となるので, 方程式

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}(t) &= \frac{1}{i\hbar}[T(t), H] \\ T(0) &= T\end{aligned} \tag{6.3}$$

をえる. 方程式 (6.3) のことを **Heisenberg 方程式**という.

Heisenberg 方程式の最も基本的な応用として, “保存量” を定義する ([11, p.33] 参照*26).

Definition 6.2.1 (保存量)**.** 物理量 T が**保存量**であるとは, $[T, H] = 0$ が成り立つことである.

Remark 6.2.1. T が保存量ならば, $T(t) = T$ が Heisenberg 方程式 (6.3) の解となるので, 期待値 $\langle \Psi(t), T\Psi(t) \rangle$ は t に依らない, すなわち, 時間について不変量になる. また, 定義から, H は保存量となるので, $E \coloneqq \langle \Psi(t), H\Psi(t) \rangle$ は時間について不変量であることがわかる. E はエネルギーの期待値を表していることから, これは, **エネルギー保存則** (energy conserrvation law) に他ならない.

---

*26 参考文献 [11] を教えてくださった一ノ瀬弥先生にはこの場を借りてお礼申し上げます.

6.3 量子化

6.3.1 量子化とは何か

位置作用素や運動量作用素を用いると, 古典力学と量子力学の対応については次のようになると考えられる.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{古典力学} & \longleftrightarrow & \text{量子力学} \\
\{x_j, \xi_j\}_P = \delta_{jk} & \longleftrightarrow & [M_{x_j}, P_k] = i\hbar\delta_{jk} \\
\dfrac{da}{dt}(x(t), \xi(t)) = \{a, H\}_P(x(t), \xi(t)) & \longleftrightarrow & \dfrac{dT}{dt}(t) = \dfrac{1}{i\hbar}[T(t), H]
\end{array}
$$

ここで, δ_{jk} は Kronecker のデルタである. 一般に, 古典力学系から上述のように対応する量子系へ移行する手続きを**量子化**という. 以下では, 量子化の対応を Q で表すことにする. Q に対しては次の関係が成り立つことが望まれる:

$$[Q(t), Q(s)] = i\hbar Q(\{t, s\}_P), \quad Q \text{ は線形である}, \quad Q(\mathbf{1}) = I$$

しかしながら, van Hove などにより, 次の事実が与えらている.

Fact. すべての $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^d$ 上の物理量に対して, うまく量子化する手続きを与えることは出来ない.

そこで, 以下では,

$$[Q(t), Q(s)] = i\hbar Q(\{t, s\}_P)$$

が "だいたい" 成り立つ量子化について述べる.

6.3.2 Weyl 量子化

以下では, いくつかある量子化の方法の 1 つである **Weyl 量子化**について述べる[*27]. なお, 定義などについては, 中村周先生の著書 [11] を参照している.

Definition 6.3.1. $g_0 = dx^2 + d\xi^2$ を $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi$ 上の標準的な Riemann 計量とし, $m(\cdot, \cdot)$ を $\mathbb{R}^{2d}$ 上の正値関数とする. このとき, $\hbar > 0$ をパラメータとする関数 $a(\hbar; \cdot, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ が $S(m, g_0)$ の元であるとは, 任意の多重指数 α, β に対して,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(\hbar : x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} m(x, \xi) \qquad (\hbar \in (0, 1], x, \xi \in \mathbb{R}^d)$$

をみたすことである.

Definition 6.3.2. $\mathbb{R}^{2d}$ 上の正値関数 $m(\cdot, \cdot)$ が**許容される重み関数** (admissible weight) であるとは,

$$m(x, \xi) \leq C\langle x - y; \xi - \eta\rangle^N m(y, \eta) \qquad (x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}^d)$$

となる $C, N > 0$ が存在することである. ただし,

$$\langle x; y\rangle \coloneqq \sqrt{1 + |x|^2 + |\xi|^2}$$

[*27] その他の量子化としては, **正準量子化**, **anti-Wick 量子化**, **Toeplitz 量子化**, **幾何学的量子化**などがある.

である.

Definition 6.3.3 (Weyl 量子化)**.** $m(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{R}^{2d}$ 上の許容される重み関数とし, $a(\hbar;\cdot,\cdot) \in S(m, g_0)$ とする. このとき, 任意の $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$(a^W(\hbar; x, \hbar D_x)u)(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi/\hbar} a(\hbar; (x+y)/2, \xi) u(y)\, dy d\xi \tag{6.4}$$

と定めると $a^W(\hbar; x, \hbar D_x)$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素となる. ただし,

$$D_x \coloneqq \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

である. (6.4) で定義される作用素 $a^W(\hbar; x, \hbar D_x)$ を $a(\hbar; x, \xi)$ の **Weyl 量子化** (Weyl quantization) という.

Definition 6.3.4. 作用素 A がある関数 $a(\hbar; x, \xi)$ の Weyl 量子化であるとき, A を **$\hbar$-擬微分作用素** ($\hbar$-pseudodiiferential operator) [*28] という.

Weyl 量子化の例をいくつか紹介する.

Example 6.3.1. $a(\hbar; x, \xi)$ が ξ に依存しない場合を考える. 以下では, $a(\hbar; x) \coloneqq a(\hbar; x, \xi)$ と表すことにする. このとき, $a(\hbar; x)$ の Weyl 量子化 $a^W(\hbar; x, \hbar D_x)$ は,

$$\begin{aligned}
(a^W(\hbar; x, \hbar D_x)u)(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi/\hbar} a(\hbar; (x+y)/2) u(y)\, dy d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi/\hbar} e^{-iy\cdot\xi/\hbar} a(\hbar; (x+y)/2) u(y)\, dy d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi/\hbar} \mathcal{F}_\hbar (a(\hbar; (x+\cdot)/2)u)(\xi)\, d\xi \\
&= a(\hbar; (x+x)/2)u(x) = a(x)u(x)
\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$(\mathcal{F}_\hbar a(\hbar; (x+\cdot)/2)u)(\xi) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} a(\hbar; (x+y)/2) u(y) e^{-iy\cdot\xi/\hbar}\, dy$$

である.

Example 6.3.2. $b(\hbar; x, \xi) \coloneqq a(\hbar; x)\xi_j$ とおく. このとき, $b(\hbar; x, \xi)$ の Weyl 量子化 $b^W(\hbar; x, \hbar D_x)$ は,

$$\begin{aligned}
(b^W(\hbar; x, \hbar D_x)u)(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi/\hbar} b(\hbar; (x+y)/2, \xi) u(y)\, dy d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi/\hbar} a(\hbar; (x+y)/2)\xi_j u(y)\, dy d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi/\hbar} a(\hbar; (x+y)/2)\xi_j e^{-iy\cdot\xi/\hbar} u(y)\, dy d\xi \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\xi_j e^{-iy\cdot\xi/\hbar} = -\frac{\hbar}{i}\partial_{y_j} e^{-iy\cdot\xi/\hbar}$$

[*28] 擬微分作用素 (pseudodiiferential operator) の一般論とその応用については熊ノ郷準先生の著書 [9] を参照されたい.

であることを用いると, (6.5) 式は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi/\hbar}a(\hbar;(x+y)/2)\xi_j e^{-iy\cdot\xi/\hbar}u(y)\,dyd\xi \\
&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hbar}{i}e^{ix\cdot\xi/\hbar}a(\hbar;(x+y)/2)\partial_{y_j} e^{-iy\cdot\xi/\hbar}u(y)\,dyd\xi \\
&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hbar}{i}e^{i\xi\cdot(x-y)/\hbar}\partial_{y_j}(a(\hbar;(x+y)/2)u(y))\,dyd\xi
\end{aligned}$$

となる.

$$\partial_{y_j}a(\hbar;(x+y)/2)u(y)=\frac{1}{2}\partial_{x_j}a(\hbar;(x+y)/2)u(y)+a(\hbar;(x+y)/2)\partial_{x_j}u(y)$$

なので,

$$b^W(\hbar;x,\hbar D_x)u=\frac{1}{2}(\hbar D_{x_j}(au)+a\hbar D_{x_j}u)$$

をえる. ここで, $a(x)=x_k$ の場合を考えると,

$$\begin{aligned}
\left((x_k\xi_j)^W(\hbar;x,\hbar D)u\right)(x)&=\frac{1}{2}(\hbar D_{x_j}(x_k u)+x_k\hbar D_{x_j}u)(x) \\
&=\frac{1}{2}(P_jM_{x_k}+M_{x_k}P_j)u(x)
\end{aligned}$$

をえる.

Example 6.3.3. $H(\hbar;x,\xi)\coloneqq\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$ *29 と定める. $H(\hbar;x,\xi)$ の Weyl 量子化 $H^W(\hbar;x,\hbar D_x)$ は,

$$H^W(\hbar;x,\hbar D_x)=-\frac{\hbar^2}{2}\Delta+V(x)$$

となる. したがって, Schrödinger 作用素*30 は $H(\hbar;x,\xi)$ の Weyl 量子化とみなせる.

6.3.3 シンボルと $\hbar$-擬微分作用素

Definition 6.3.5 (シンボル)**.** A を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素とし, $a(\hbar;\cdot,\cdot)\in S(m,g_0)$ とする. このとき, A が $OPS(m,g_0)$ であるとは, 作用素としての等式

$$A=a^W(\hbar;x,\hbar D_x)$$

が成り立つことである. また, $a(\hbar;\cdot,\cdot)$ を A の**シンボル** (symbol) とよび, $a=Sym(A)$ と表す*31 .

以下に見るように, $\hbar$-擬微分作用素は L^2-空間上でよい作用素を定めることがわかる. それぞれの証明については本 [21, 30] などを参照されたい.

Proposition 6.3.1. m を許容される重み関数とし, $A\in OPS(m,g_0)$ とする. このとき, A は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続な作用素のである.

---

*29 V は, たかだか多項式状の増大をする滑らかな関数であると仮定する.
*30 Schrödinger 作用素については, Example B.2.1 や [3, p.225] を参照されたい.
*31 [11, p.206] にも書かれているが, これは標準的な記法ではない.

Proposition 6.3.2. $A \in OPS(m, g_0)$ ならば $A^* \in OPS(m, g_0)$ であり, A^* のシンボルは $\overline{Sym(A)}$ で与えられる. 特に, $a(\hbar; \cdot, \cdot) \in S(m, g_0)$ が実数値関数ならば, $A = a^W(\hbar; x, \hbar D_x)$ は対称作用素である.

Theorem 6.3.1 (L^2-有界性)**.** $A \in OPS(1, g_0)$ ならば A は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界作用素である. また,

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq C \qquad (\hbar \in (0, 1])$$

となる $C > 0$ が存在する.

Theorem 6.3.2 (合成と漸近展開の公式)**.** m_1, m_2 を許容される重み関数とし, $A \in OPS(m_1, g_0)$, $B \in OPS(m_2, g_0)$ とする. このとき, $AB \in OPS(m_1 m_2, g_0)$ である. また, $c \coloneqq Sym(AB)$ とおくと,

$$c - \sum_{j=0}^{N} \frac{\hbar^j}{j!} c_j \in S(\hbar^{N+1} m_1 m_2, g_0)$$

が成り立つ. ただし,

$$c_j(\hbar; x, \xi) \coloneqq \left(\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right)^j a(\hbar; x, \xi) b(\hbar; y, \eta) \bigg|_{y=x, \eta=\xi}$$

である.

Remark 6.3.1. m_1, m_2, A, B, c, c_j は Theorem 6.3.2 と同様とする. Theorem 6.3.2 の主張を, 漸近展開の記号を用いて

$$c \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hbar^j}{j!} c_j \qquad (\hbar \to 0)$$

とかく. このとき, Theorem 6.3.2 で $N = 0$ の場合を考えると,

$$Sym(AB) - Sym(A) Sym(B) \in S(\hbar m_1 m_2, g_0)$$

が成り立つ. これは, AB のシンボルの主要項がシンボルの積で与えられることを意味する. 特に, $m_1 = m_2 = 1$ の場合, Theorem 6.3.1 と組み合わせると, 誤差項の作用素ノルムが $O(\hbar)$ であることがわかる.

6.4 WKB 近似

ポテンシャル $V(x, t)$ のもとで運動する質量 m の粒子に対する, 時間に依存する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_0 \Psi + V \Psi \tag{6.6}$$

を考える. ただし, $\Delta_0 \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ は

$$\Delta_0 \coloneqq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_L^2}$$

と定める. (6.6) で与えられる Schrödinger 方程式については, 波動関数を $\Psi(x, t) \coloneqq a(x, t) e^{iS(x,t)/\hbar}$ としたとき, 次の定理が成り立つ ([25, p.246, Theorem 15.1.1] 参照[*32]).

[*32] [25, Theorem 15.1.1] では, ∇^2 という記号を用いているが, 定義は Δ_0 と同じである.

Theorem 6.4.1. 波動関数 $\Psi(x,t)=a(x,t)e^{iS(x,t)/\hbar}$ が Schrödinger 方程式 (6.6) をみたすための必要十分条件は, a と S が

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{|\nabla S|^2}{2m}+V&=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta_0 a}{a}\\ \frac{\partial(a^2)}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{a^2}{m}\nabla S\right)&=0\end{aligned}\tag{6.7}$$

をみたすことである.

ここで, (6.7) 式に注目すると, 右辺については $\hbar$ に依存するが左辺については $\hbar$ に依存しないことがわかる. そこで, $\hbar\to 0$ とすると, (6.7) 式は Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{|\nabla S|^2}{2m}+V=0$$

となることがわかる. そこで, 次を定義する ([25, p.247, Definition 15.1.1] 参照).

Definition 6.4.1. WKB 近似 (WKB approximation) *33 または**準古典近似** (semi-classical approximation) は, 波動関数 $\Psi(x,t)=a(x,t)e^{iS(x,t)/\hbar}$ を用いる. ただし, a と S は次の方程式をみたす関数である:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{|\nabla S|^2}{2m}+V&=0\\ \frac{\partial(a^2)}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{a^2}{m}\nabla S\right)&=0\end{aligned}$$

WKB 近似を用いて (6.6) の近似解を求める. 一般的には, 半古典的波動関数 S は古典的な運動方程式の解から直接計算でき, a は連続の方程式から直接計算することができることが知られている ([25, pp.247–249] 参照). 一方で, 次の定理により, Hamilton-Jacobi 方程式の解から連続の方程式の解を直接計算することができる. ([25, p.249, Theorem 15.2.1] 参照).

Theorem 6.4.2 (Van Vlech)**.** $S(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を Hamilton-Jacobi 方程式の解とする. このとき,

$$a^2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial y_k}\right)$$

が連続の方程式の解である.

Example 6.4.1 (自由粒子)**.** Hamilton-Jacobi 方程式の解は

$$S(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{m}{2t}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

となる ([25, p.250] 参照). これに対応する確率密度関数は

$$a^2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial y_k}\right)=\det\left(-\frac{m}{t}1\right)=-\left(\frac{m}{t}\right)^3$$

*33 WKB は理論物理学者 Wentzel, Kramers, Brillouin の頭文字から由来する. また, Jeffreys の頭文字をとって WKBJ 近似と表記する場合もある.

である. したがって, 準古典波動関数は

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = e^{im|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/2\hbar t}$$

となる.

古典的な Hamilton 力学の他の結果を考察している物に適用したのが次の命題である ([25, p.251, Proposition 15.2.2] 参照)

Proposition 6.4.1. Hamilton-Jacobi 方程式はの解は,

$$\frac{|\nabla W|^2}{2m} + V = E$$

が与えられたとき,

$$S(\mathbf{x},t) = W(\mathbf{x}) - Et$$

である. また, エネルギー E をもつ時間に依存する Schrödinger 方程式の解は

$$\Psi = a(\mathbf{x})e^{iW(\mathbf{x})/\hbar}e^{-iEt/\hbar}$$

である.

この命題から次の系をえる ([25, p.251, Corollary 15.2.3] 参照)

Corollary 6.4.1. 1 次元の Hamilton-Jacobi 方程式の解は

$$S(x,t) = \pm\int_0^x \sqrt{2m(E-V(x'))}\,dx' - Et$$

であり, 連続の方程式の解は

$$a(x) = A(E-V(x))^{-1/4}$$

である. ただし, A は定数である.

ここで, $p(x') \coloneqq \sqrt{2m(E-V(x'))}$ とおく. $E > V(x')$ が成り立つ, すなわち, 古典的に許される領域での時間に依存する Schrödinger 方程式の解は

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int_0^x p(x')\,dx' - \frac{iEt}{\hbar}\right)$$

であることがわかる[*34]. 反対に, $E < V(x')$ が成り立つ, すなわち, 古典的に許されれない領域の場合を考える. この場合, $q(x') \coloneqq \sqrt{V(x')-E}$ とおくと $p(x') = iq(x')$ となるので, 古典的に許されれない領域での時間に依存する Schrödinger 方程式の解は

$$\Psi(x,t) = \frac{A'}{\sqrt{q(x)}}\exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int_0^x q(x')\,dx' - \frac{iEt}{\hbar}\right)$$

であることがわかる. ただし, A' は定数である.

もっと単純な例について 1 つ紹介する ([25, p.252, Example 15.2.1] 参照).

[*34] $\exp(x) \coloneqq e^x$ である.

Example 6.4.2 (1 次元の自由粒子の場合)**.** $V = 0$ となるような, 質量 $m > 0$ である 1 次元の自由粒子を考える. この場合での 1 次元の Hamilton-Jacobi 方程式の解は

$$S(x,t) = \pm\sqrt{2mE}x - Et$$

であり, 連続の方程式の解 a は

$$a^2 = \pm\sqrt{m/2E}$$

をみたす. したがって, 波動関数は

$$\Psi(x,t) = \exp\left(i(\pm\sqrt{2mE}x - Et)/\hbar\right)$$

となり, 平面波の定数倍であることがわかる.

この節では時間に依存する Schrödinger 方程式について扱ったが, 時間に依存しない Schrödinger 方程式の WKB 近似については [24, Chapter 15] を参照されたい.

付録A　parametrix と Theorem 2.5.1 の応用例

A.1　parametrix を用いた Theorem 2.5.1 の応用例

Example A.1.1. Theorem 4.3.1 から $-\Delta_0$ は本質的に自己共役であるが, Theorem 2.5.1 を用いても本質的に自己共役であることが示される.

Proof.

$$(Q_\pm u)(x) \coloneqq \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2 \pm i}\mathcal{F}u\right](x) \qquad (u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d)$$

と定めると[*35] , $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば $Q_\pm u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ. また,

$$(-\Delta_0 \pm i)Q_\pm u = u \qquad (u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$$

が成り立つ. したがって,

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \operatorname{ran}(-\Delta_0 \pm i) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$$

となるので, $\operatorname{ran}(-\Delta_0 \pm i)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることがわかる. よって, Theorem 2.5.1(iii) から $-\Delta_0$ は本質的に自己共役である. □

Example A.1.2. $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は, ある $k, C, R > 0$ が存在し,

$$V(x) \geq C(1+|x|)^k \qquad (\forall |x| \geq R)$$
$$|\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^k \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0)$$

が成り立つような実数値関数とする. このとき, $-\Delta_0 + V$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ から $L^2(\mathbb{R}^d)$ への本質的に自己共役な作用素である.

Proof. $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して,

$$(Q(z)u)(x) \coloneqq \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2 + V(x) - z}\mathcal{F}u\right](x) \qquad (u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d)$$

と定めると[*36] , $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば $Q(z)u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ. また, $|\lambda| \gg 1$ となる任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\|R(i\lambda)\|_{\mathrm{op}} < 1$ であるような $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界作用素 $R(z)$ を用いて

$$(-\Delta_0 + V - z)Q(z)u = u + R(z)u$$

と表せる. $y \neq 0$ となる任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して, $\operatorname{ran}(-\Delta_0 + V - iy)$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることを示す. そのために, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき,

$$\|(1 + R(iy))^{-1}u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

[*35] $Q_\pm$ がこの場合での parametrix である.
[*36] $Q(z)$ がこの場合での parametrix である.

となる $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ が存在する．このとき，

$$(-\Delta_0 + V - iy)Q(iy)v = v + R(iy)v$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\|u - (-\Delta_0 + V - iy)Q(iy)v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|u - (1 + R(iy))v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|((1 + R(iy)))((1 + R(iy))^{-1}u - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|1 + R(iy)\|_{\mathrm{op}}\|(1 + R(iy))^{-1}u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&< \|1 + R(iy)\|_{\mathrm{op}}\varepsilon
\end{aligned}$$

をえる．したがって，$\mathrm{ran}(-\Delta_0 + V - iy)$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密である．同様の議論から $\mathrm{ran}(-\Delta_0 + V + iy)$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることが示せるので，Theorem 2.5.1 から $-\Delta_0 + V$ は本質的に自己共役である． □

A.2 parametrix の幾何学への応用

parametrix を用いることで多様体上の解析を行えることを紹介する*37．なお，定義などについては，茂木勇先生，伊藤光弘先生の著書 [14] を参照している．

Definition A.2.1 (k 次交代形式)**.** M を n 次元 C^∞ 多様体とし，$k \geq 1$ する．また，S_k を $\{1, \ldots, k\}$ の置換全体の集合とし，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ を $\sigma \in S_k$ の符号とする．さらに，

$$\omega\colon \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\ 個} \to \mathbb{R}$$

を k 重線形形式とする．このとき，任意の $u_1, \ldots, u_k \in T_pM$, $\sigma \in S_k$ に対して，

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(u_1, \ldots, u_k)$$

が成り立つとき，ω を T_pM 上の k **次交代形式**という．T_pM 上の k 次交代形式全体の集合を $\Lambda^k(T_pM)$ と表す．

Definition A.2.2 (k-形式)**.** $\Lambda^k(M) = \displaystyle\bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$ とおく．ω を M 上のタイプ $(0, k)$ のテンソル場とする*38．このとき，ω が

$$\omega\colon M \to \Lambda^k(M);\ p \mapsto \omega(p) = \omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$$

であるとき，ω を M 上の k**-形式**という．M 上の k-形式全体の集合を $\Omega^k(M)$ と表す．ただし，$0 \leq k \leq n$ であり，$\Omega^0(M) \coloneqq C^\infty(M)$ とする．

Definition A.2.3 (外積)**.** 写像 $\wedge\colon \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M)$ を，$\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ に対して，

$$(\omega \wedge \eta)(p) \coloneqq \omega_p \wedge \eta_p \qquad (p \in M)$$

と定める．$\omega \wedge \eta$ を ω と η の**外積**という．

*37 幾何学との関連については本 [20] で詳しく述べられている．
*38 定義については，[14, pp.8–10] を参照

外積については次の命題が成り立つ ([14, p.11] 参照).

Proposition A.2.1. 外積に関して, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \qquad (\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)). \\
&f(\omega \wedge \eta) = (f\omega) \wedge \eta = \omega \wedge f(\eta) \qquad (f \in C^\infty(M)). \\
&\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta \\
&(\omega + \eta) \wedge \theta = \omega \wedge \theta + \eta \wedge \theta \\
&(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)
\end{aligned}$$

C^∞ 多様体上の C^∞ 関数 f の微分 df が 1-形式である, すなわち, 微分 d は, 写像

$$d \colon C^\infty(M) = \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$$

であることに注意すると, この拡張である次の概念に到達する ([14, p.12] 参照).

Definition A.2.4 (外微分作用素)**.** 写像

$$d \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

を**外微分作用素**という. また, $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ に対して, $d\omega$ を ω の**外微分**という.

外微分作用素については次の命題が成り立つ ([14, p.12] 参照).

Proposition A.2.2. 任意の $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ に対して,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

が成り立つ. また,

$$d^2 = 0$$

が成り立つ.

Definition A.2.5 (内積)**.** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を順序対とし, $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ の双対基底とする. また, $\theta, \eta \in \Omega^k(M)$ を

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{k!} \sum \theta_{i_1 \cdots i_k}(p) \omega_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_p^{i_k} \\
\eta &= \frac{1}{k!} \sum \eta_{j_1 \cdots j_k}(p) \omega_p^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_p^{j_k}
\end{aligned}$$

とおく. $p \in M$ に対して $\langle \theta, \eta \rangle(p)$ を

$$\langle \theta, \eta \rangle(p) \coloneqq \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \cdots i_p = 1}^{n} \theta_{i_1 \cdots i_k}(p) \eta_{i_1 \cdots i_k}(p)$$

と定め, θ と η の p での内積という.

Definition A.2.6 (内積)**.** (M, g) を向きづけられた n 次元 Riemann 多様体とする. 任意の $\theta, \eta \in \Omega^k(M)$ に対して,

$$\langle \theta, \eta \rangle = \int_M \langle \theta, \eta \rangle(p) \, \omega_M$$

と定め, θ と η の内積という. ただし, ω_M は (M, g) の体積要素である.

Definition A.2.7 (Hodge 作用素)**.** $*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(\Omega)$ を

$$(*\theta)_p \coloneqq *\theta_p \qquad (\theta \in \Omega^k(M))$$

と定める. 写像 $*$ を **Hodge 作用素**という.

Definition A.2.8 (余微分作用素)**.** (M, g) を向きづけられた n 次元 Riemann 多様体とする. 線形作用素 $\delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ を

$$\begin{aligned} &\delta f = 0 \qquad (f \in \Omega^0(M)) \\ &\delta\theta = (-1)^{nk+n+1} * d * \theta \qquad (\theta \in \Omega^k(M), k \geq 1) \end{aligned}$$

で定義する. δ を**余微分作用素**という.

余微分作用素については次の命題が成り立つ.

Proposition A.2.3. (M, g) を向きづけられた n 次元 Riemann 多様体とする. このとき,

$$*\delta = (-1)^k d*, \quad *d = (-1)^{k+1}\delta*$$

が成り立つ. また,

$$\delta^2 = 0$$

が成り立つ.

次の命題から, 余微分作用素 δ が外微分作用素 d の形式的共役作用素であることがわかる ([14, p.24, 命題 1.4.6]) [*39].

Proposition A.2.4. (M, g) を向きづけられた n 次元 Riemann 多様体とし, $\theta \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ を, $(n-1)$-形式 $\theta \wedge *\eta$ の台がコンパクトとなるような微分形式とする. このとき,

$$\langle \theta, \delta\eta \rangle = \langle d\theta, \eta \rangle$$

が成り立つ.

Definition A.2.9 (Laplace 作用素)**.** 2 階の微分作用素 $\Delta_g\colon \Omega^k \to \Omega^k(M)$ を

$$\Delta_g \coloneqq d\delta + \delta d$$

と定め, (M, g) の **Laplace 作用素**という.

Definition A.2.10. $\theta \in \Omega^k(M)$ が $\Delta_g\theta = 0$ をみたすとき, θ は**調和 k-形式**であるという. 調和 k-形式全体の空間を H^k と表す.

Example A.2.1. (M, g) を向き付けされたコンパクト Riemann 多様体とする. このとき, 次のような parametrix を作れる:

$$\begin{aligned} &Q(z)\colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(M) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \\ &(\Delta_g - z)Q(z)\omega = \omega + R(z)\omega \qquad (\omega \in \Omega^k(M)_{\otimes\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

*39 証明は [13, 第 3 章 3.8] を参照.

ただし, $R(z)$ は Example A.1.2 の証明のときと同様とする. このとき, Example A.1.2 の証明と同様の議論から $\operatorname{ran}(\Delta_g - iy)$ は $\mathscr{H} = \overline{\Omega^k(M)}$ で稠密となる.

parametrix の応用の 1 つに Hodge-de Rham-小平の分解定理への応用がある. Hodge-de Rham-小平の分解定理とは次の定理のことである ([14, p.25, 定理 1.4.8] を参照).

Theorem A.2.1 (Hodge-de Rham-小平の分解定理)**.** (M, g) を向きづけられたコンパクト Riemann 多様体とする. このとき, 任意の微分形式 $\eta \in \Omega^k(M)$ $(1 \leq p \leq n = \dim M)$ に対して,

$$\eta = \xi + d\zeta + \delta\omega$$

となる $\xi \in H^k$, $\zeta \in \Omega^{k-1}(M)$, $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ が唯一つ存在する.

Hodge-de Rham-小平の分解定理の証明にはいくつかの方法がある (例えば [13, 第 3 章 3.8]). ここでは parametrix を用いた証明の方法の概略についてのみ述べることとする.

Proof. 次の性質をみたす $L^2(M; \Omega^k)$ 上の有界作用素 Q とコンパクト作用素 R を定義する:

$$u \in \Omega^k(M) \ \Rightarrow Qu \in \Omega^k(M), \quad (Q\Delta_g)\omega = \omega + R\omega \ (\omega \in \operatorname{dom}(\Delta_g)), \quad \omega \in L^2(M; \Omega^k) \ \Rightarrow \ R\omega \in \Omega^k(M)$$

このとき, Δ_g が本質的に自己共役であるならば, $H \coloneqq \overline{\Delta_g}$ とおくと,

$$(QH)\omega = \omega + R\omega \qquad (\omega \in \operatorname{dom}(H))$$

が成り立つ.

[Step1] H が閉作用素であることから, $\ker(H)$ は閉集合 $L^2(M; \Omega^k)$ となる. $(\ker(H))^\perp = \overline{\operatorname{ran}(H)}$ であることに注意すると, Theorem 3.1.1 から,

$$L^2(M; \Omega^k) = \ker(H) \oplus \overline{\operatorname{ran}(H)}$$

[Step2] R のコンパクト性から,

$$\|\omega\| \leq C\|H\omega\| \qquad (\omega \in \operatorname{dom}(H) \cap \overline{\operatorname{ran}(H)})$$

となる $C \geq 0$ が存在する. したがって, $\operatorname{ran}(H)$ は閉である.

[Step3] $\omega \in \operatorname{dom}(H)$ とする. このとき, $H\omega \in \Omega^k$ ならば, $Q(H\omega) = \omega + R\omega$ が成り立つ. ここで, $Q(H\omega), R\omega \in \Omega^k(M)$ であることから, $\omega \in \Omega^k(M)$ が成り立つ.

[Step4] $\omega \in \Omega^k(M)$ とする. このとき, Step1, Step2 から,

$$\omega = \omega_0 + H\omega_1 \in \ker(H) \oplus \operatorname{ran}(H)$$

となる $\omega_0 \in \ker(H)$, $\omega_1 \in \operatorname{dom}(H)$ が存在する. このとき, $\omega_0 \in \Omega^k(M)$ なので,

$$H\omega_1 = \omega - \omega_0 \in \Omega^k(M)$$

となる. ここで, Step3 から, $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ が成り立つので,

$$H\omega_1 = \Delta_g\omega_1 = d\delta\omega_1 + \delta d\omega_1$$

をえる. よって,

$$\Omega^k(M) = \ker(\Delta) \oplus d\Omega^{k-1} \oplus \delta\Omega^{k+1}$$

をえる. □

付録B　Kato-Rellich の定理

ここでは, Hilbert 空間上のある種の作用素が自己共役であることを示すのに用いられる Kato-Rellich の定理について述べる. 以下では $\mathscr{H}$ を Hilbert 空間とする.

B.1　準備

Definition B.1.1. T を $\mathscr{H}$ 上の閉作用素とする. $\mathscr{D}$ を $\mathscr{D} \subset \mathrm{dom}(T)$ となる部分空間とする. このとき, T の $\mathscr{D}$ への制限 $T \restriction \mathscr{D}$ が可閉作用素であって, $\overline{T \restriction \mathscr{D}} = T$ が成り立つとき, $\mathscr{D}$ を T の**芯** (core) という.

Definition B.1.2. T, S を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする. このとき $\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(S)$ かつ

$$\|S\Psi\| \leq a\|T\Psi\| + b\|\Psi\| \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(T))$$

をみたす $a, b \geq 0$ が存在するとき, S は T に関して**相対的に有界** (relatively bounded) または **T-有界**であるという.

B.2　摂動論と Kato-Rellich の定理

Definition B.2.1. T, S を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする. T に S を加えることを T の S による**摂動** (pertubation) という. この場合, T を**無摂動作用素** (unpertubation operator), S を**摂動**といい, 摂動によって生じる作用素 $T+S$ を**摂動を受けた作用素** (pertubation operator) という.

T の性質がよくわかっているとき, $T+S$ の性質がどのようになるかを調べる問題を T に関する**摂動問題**といい, この問題を研究する分野を**線形作用素の摂動論**という. 量子力学における摂動論の数学的に厳密な基礎付けについては, T. Kato の著書 [29] などがある.

一般に, 非有界作用素 T, S が自己共役であっても, $T+S$ が自己共役であるとは限らない. 一方で, 次の定理はある条件の下では $T+S$ が自己共役となることを主張している ([1, p.48, 定理 2.7] 参照[*40]).

Theorem B.2.1 (Kato-Rellich の定理)**.** T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし, S を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする. このとき, このとき $\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(S)$ かつ

$$\|S\Psi\| \leq a\|T\Psi\| + b\|\Psi\| \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(T))$$

をみたす $0 \leq a < 1$, $b \geq 0$ が存在するとき, 次が成り立つ.

(i) $\mathrm{dom}(T+S) = \mathrm{dom}(T)$ であり, $T+S$ は自己共役である.
(ii) $T+S$ は T の任意の芯上で本質的に自己共役である.
(iii) T が下に有界で $T \geq \gamma$ となる $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在するならば, $T+S$ も下に有界であり,

$$T+S \geq \gamma - \max\left\{\frac{b}{1-a}, a|\gamma| + b\right\} \tag{B.1}$$

が成り立つ.

---

*40 [3, pp.263–264, 定理 8.1] でも Kato-Rellich の定理を扱っているが, (B.1) 式の記載はない.

Example B.2.1. V を 3 次元 Lebesgue 測度に関してほとんど至る所有限な実数値 Borel 可測関数とする．$L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の作用素 H_1 を

$$H_1 \coloneqq -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V \tag{B.2}$$

で定める．ただし，$M > 0$ とする[*41]．Theorem B.2.1 を適用することにより，次の事実が得られる:

Theorem B.2.2. $\mathrm{dom}(\Delta) \subset \mathrm{dom}(V)$ かつ

$$\|V\Psi\| \leq \frac{a\hbar^2}{2M}\|\Delta\Psi\| + b\|\Psi\| \qquad (\Psi \in \mathrm{dom}(\Delta))$$

となる $0 \leq a < 1$, $b \geq 0$ が存在するとする．このとき，$\mathrm{dom}(H_1) = \mathrm{dom}(\Delta)$ であり，H_1 は下に有界な自己共役作用素である．さらに，H_1 は Δ の任意の芯上で本質的に自己共役である．特に，H_1 は $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的に自己共役である．

[*41] (B.2) 式で定義される作用素を V をポテンシャルとする 1 体 **Shrödinger 作用素**という．この場合，$M > 0$ は量子的粒子の質量を表す定数である．

付録C　ユニタリ同値

C.1　ユニタリ同値の定義

Definition C.1.1 (ユニタリ同値)**.** T, S を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする．このとき,

$$U\,\mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(S), \quad (UTU^*)\Psi = S\Psi \ (\Psi \in \mathrm{dom}(S))$$

となるユニタリ作用素 U が存在するとき, T と S は**ユニタリ同値** (unitary equivalent) という．

Remark C.1.1. T, S を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする．このとき, T と S がユニタリ同値となるとき,

$$T \overset{U}{\sim} S$$

と表す．このとき, $\overset{U}{\sim}$ は同値関係となる．

ユニタリ同値性は閉作用素のスペクトルや固有値を調べうえで非常に有効である．実際, 2 つの閉作用素 T と S がユニタリ同値であるとすると, Theorem 2.7.1(iv) から,

$$\sigma(T) = \sigma(UTU^*) = \sigma(S), \quad \sigma_p(T) = \sigma_p(UTU^*) = \sigma_p(S)$$

が成り立つ．したがって, T のスペクトルや固有値を調べることと S のスペクトルや固有値を調べることは同値である．

C.2　自己共役作用素のユニタリ同値性

Fourier 変換がユニタリ作用素であることに注意すると, Theorem 4.3.1 は, 自己共役作用素である一般化された Laplacian Δ が, 関数 $w(k) = k^2$ によるかけ算作用素 M_w とユニタリ同値であることを主張する定理である．そこで Theorem 4.3.1 を一般化するような次の問題を考える:

任意の自己共役作用素はかけ算作用素とユニタリ同値となるか?

この問題について肯定的に解決したのが次の定理である (Theorem C.2.1 については [24, p.147, Theorem 7.20], Theorem C.2.2 については [24, p.207, Theorem10.10] をそれぞれ参照)．

Theorem C.2.1. T を $\mathscr{H}$ 上の有界な自己共役作用素とする．このとき, σ-有限測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, X 上の有界な実数値関数 w と $\mathscr{H}$ から $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ へのユニタリ作用素 U が存在し,

$$(UTU^*f)(x) = w(x)f(x) \qquad (f \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu), x \in X)$$

が成り立つ．すなわち, $T \overset{U}{\sim} M_w$ が成り立つ．

Theorem C.2.2. T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき, σ-有限測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, X 上の有界な実数値関数 w と $\mathscr{H}$ から $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ へのユニタリ作用素 U が存在し,

$$U\,\mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(M_w), \quad (UTU^*f)(x) = w(x)f(x) \ (f \in U\,\mathrm{dom}(T), x \in X)$$

が成り立つ．すなわち, $T \overset{U}{\sim} M_w$ が成り立つ．

Theorem 2.3.2 から自己共役作用素は閉であることに注意する. すると, 任意の $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 T に対して, 上述の議論と Theorem C.2.1, Theorem C.2.2 を合わせると,

$$\sigma(T) = \sigma(M_w), \quad \sigma_p(T) = \sigma_p(M_w)$$

が成り立つ. したがって, 自己共役作用素のスペクトルや固有値を調べることとかけ算作用素のスペクトルや固有値を調べることに帰着される.

付録D　内積空間の特徴づけ

D.1　ノルム空間と Banach 空間

Definition D.1.1 (ノルム空間)**.** $\mathscr{X}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. このとき, 関数

$$\|\cdot\|_{\mathscr{X}} \colon \mathscr{X} \ni x \mapsto \|x\|_{\mathscr{X}} \in \mathbb{R}$$

が以下の性質 (N.1)–(N.4) をみたすとき, $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ を**ノルム** (norm) といい, ノルム $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ が定義されたベクトル空間 $\mathscr{X}$ を**ノルム空間** (normed linear space) という.

(N.1) 任意の $x \in \mathscr{X}$ に対して, $\|x\|_{\mathscr{X}} \geq 0$.
(N.2) $\|x\|_{\mathscr{X}} = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathscr{X}}$.
(N.3) 任意の $x \in \mathscr{X}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|_{\mathscr{X}}$.
(N.4) 任意の $x, y \in \mathscr{X}$ に対して, $\|x + y\|_{\mathscr{X}} \leq \|x\|_{\mathscr{X}} + \|y\|_{\mathscr{X}}$.

Definition D.1.2 (Banach 空間)**.** 完備なノルム空間を **Banach 空間** (Banach space) という.

Example D.1.1. Proposition 1.1.1 から, 内積空間はノルム空間である. 特に, Hilbert 空間は Banach 空間である.

Example D.1.2. $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ とする.

$$C([a,b]) \coloneqq \{f \colon [a,b] \to \mathbb{C}\ (\text{連続})\}$$

と定める. このとき, $f, g \in C([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\coloneqq f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &\coloneqq \alpha f(x) \\ \|f\|_\infty &\coloneqq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{aligned}$$

と定めると, $C([a,b])$ は Banach 空間となる.

D.2　内積空間と中線定理

以下では, 特に断りのない限り, $\mathscr{H}$ は内積空間とする. 内積空間については, 次の等式がよく知られている.

Theorem D.2.1 (中線定理)**.** 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して,

$$\|\Psi + \Phi\|^2 + \|\Psi - \Phi\|^2 = 2(\|\Psi\|^2 + \|\Phi\|^2) \tag{D.1}$$

が成り立つ.

Remark D.2.1. 次の例で示すように, 内積空間とは限らないノルム空間に対しては, 等式 (D.1) は成り立たない.

Example D.2.1. $f(x) \coloneqq x$, $g(x) \coloneqq 1 - x$ と定めると, $f, g \in C([0,1])$ である. 一方で,

$$\|f+g\| = \sup_{x\in[0,1]} |1| = 1, \quad \|f-g\| = \sup_{x\in[0,1]} |2t-1| = 1, \quad \|f\|_\infty = 1, \quad \|g\|_\infty = 1$$

なので,

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2 \neq 4 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

となり, (D.1) 式が成り立たない.

Example D.2.1 からわかるように, 内積空間でないノルム空間では (D.1) 式は成り立たない. 実際, 一般論として, 内積空間ではないノルム空間では (D.1) 式は成り立たない. なぜなら, 次の定理からわかるように, 内積空間ならびに内積の本質には中線定理があるからである

Theorem D.2.2. $(X, \|\cdot\|_{\mathscr{X}})$ をノルム空間とする. このとき, X が $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ をみたす内積 $\langle x, y\rangle$ $(x, y \in X)$ をもつための必要十分条件は, 中線定理が成り立つことである.

必要性については Theorem D.2.1 から明らかである. 十分性については, $x, y \in X$ に対して,

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{D.2}$$

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{D.3}$$

と定める. ただし, (D.2) 式は X が実線形の場合, (D.3) 式は X が複素線形の場合である. このように定めると, (D.2) 式と (D.3) 式はそれぞれ $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ をみたす内積となる. なお, 証明の詳細については [12, pp.29–31, 定理 6.4] を参照されたい[*42].

[*42] Theorem D.2.2 の証明は, P. Jordan and J. von Neumann の論文 [27] にて初めて与えられた.

付録E　Riesz-Markov-Kakutani の定理

Theorem 3.2.3 の証明に用いられる Riesz-Markov-Kakutani の定理[*43] について述べる.

E.1　共役空間と Hahn-Banach の定理

Definition E.1.1. $\mathscr{X}$ をノルム空間とする. $\mathscr{X}$ 上の有界線形汎関数からなる集合を $\mathscr{X}^*$ と表し, $\mathscr{X}^*$ のことを $\mathscr{X}$ の**共役空間**または**双対空間** (dual space) という.

共役空間については, 次の命題が成り立つ.

Proposition E.1.1. $\mathscr{X}$ をノルム空間とする. $\mathscr{X}^*$ は各点での和・スカラー積とノルム

$$\|x^*\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\substack{x \in \mathscr{X} \\ x \neq 0_{\mathscr{X}}}} \frac{|x^* x|}{\|x\|} \qquad (x^* \in \mathscr{X}^*)$$

に関して Banach 空間となる.

次に述べる定理は, 有界線形汎関数に関する最も重要な定理である ([34, p.104, Theorem 5.16] 参照).

Theorem E.1.1 (Hahn-Banach の定理)**.** $\mathscr{X}$ をノルム空間とし, $\mathscr{M}$ を $\mathscr{X}$ の部分空間[*44] とする. このとき, m^* が $\mathscr{M}$ 上の有界線形汎関数ならば,

$$x^* x = m^* x \ (x \in \mathscr{M}), \quad \|x^*\|_{\mathrm{op}}^{\mathscr{X}} = \|m^*\|_{\mathrm{op}}^{\mathscr{M}}$$

となる $x^* \in \mathscr{X}^*$ が存在する. ただし,

$$\|x^*\|_{\mathrm{op}}^{\mathscr{X}} := \sup_{\substack{x \in \mathscr{X} \\ x \neq 0_{\mathscr{X}}}} \frac{|x^* x|}{\|x\|}, \quad \|m^*\|_{\mathrm{op}}^{\mathscr{M}} := \sup_{\substack{x \in \mathscr{M} \\ x \neq 0_{\mathscr{M}}}} \frac{|x^* x|}{\|x\|}.$$

Remark E.1.1. Hahn-Banach の定理は Zorn の補題を用いることで証明される. 一方で, $\mathscr{M}$ が稠密な部分空間の場合については, 有界作用素のときと同様の方法で証明できる.

Theorem E.1.1 を用いることで次の定理をえる ([34, p.107, Theorem 5.20] 参照).

Theorem E.1.2. $x \in \mathscr{X}$ とする. このとき, 任意の $x^* \in \mathscr{X}^*$ に対して, $x^* x = 0$ ならば, $x = 0_{\mathscr{X}}$ である.

Theorem E.1.2 は非常に有用な定理である. 例えば, Hilbert 空間上の有界作用素 T に対して, $\sigma(T) \neq \emptyset$ (Theorem 2.7.1(ii) 参照) を証明するのに用いられたりする.

E.2　複素測度と積分

Riesz-Markov-Kakutani の定理の準備として, 3 節で定義した積分の一般論について述べる. なお, 内容については [34, Chapter 6] を参照している.

[*43] 本によっては Riesz の表現定理と書いてる場合がほとんどであるが, Theorem 2.3.1 と区別するためにこの名称を用いる.
[*44] $\mathscr{M}$ が閉集合である必要はない.

Definition E.2.1 (複素測度)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間とする．また, $E \in \mathfrak{M}$ とし, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ を E の分割とする．このとき, 関数 $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ が

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \tag{E.1}$$

をみたすとき, μ を**複素測度** (complex measure) という．

Remark E.2.1. (E.1) の右辺は絶対収束している．

Definition E.2.2 (全変動)**.** μ を $\mathfrak{M}$ 上の複素測度とする．関数 $|\mu|\colon \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ を

$$|\mu|(E) \coloneqq \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \,:\, \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M},\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_n \cap E_m = \emptyset\ (n \neq m)\right\}$$

と定め, μ の**全変動** (total variation) という．

Remark E.2.2. 一般には $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ かつ $|\mu|(E) \neq |\mu(E)|$ である．一方で, $\mu \geq 0$ ならば $|\mu|(E) = \mu(E)$ である．

全変動に関しては次の定理が成り立つ ([34, pp.117–119] 参照).

Theorem E.2.1. μ を $\mathfrak{M}$ 上の複素測度とする．このとき, μ の全変動 $|\mu|$ は非負値の測度であり, $|\mu|(X) < \infty$ が成り立つ．

測度論における重要な定理について述べる ([34, p.121, Theorem 6.10]).

Theorem E.2.2 (Radon-Nikodym の定理)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間とする．また, μ を $\mathfrak{M}$ 上の非負値 σ-有限測度とし[*45], λ を $\mathfrak{M}$ 上の複素測度とする．このとき, λ が μ に関して絶対連続ならば[*46],

$$\lambda(E) = \int_E g\, d\mu \qquad (E \in \mathfrak{M})$$

となる $g \in L^1(X,\mathfrak{M},\mu)$ が唯一つ存在する．

Theorem E.2.2 から次の定理をえる ([34, p.124, Theorem 6.12] 参照).

Theorem E.2.3. $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間とする．μ を $\mathfrak{M}$ 上の複素測度とする．このとき, $|h| = 1$ かつ

$$\mu(E) = \int_E h\, d|\mu| \qquad (E \in \mathfrak{M})$$

となる可測関数 h が存在する．

Theorem E.2.3 を用いることで複素測度に関する積分を次のように定義することができる ([34, p.129])

Definition E.2.3 (複素測度に関する積分)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間とする．μ を $\mathfrak{M}$ 上の複素測度とする．このとき, 関数 f の μ に関する積分を

$$\int_X f\, d\mu \coloneqq \int_X fh\, d|\mu|$$

*45 σ-有限測度の定義は [34, p.121] を参照.

*46 絶対連続の定義は [34, p.120, Definition 6.7] を参照.

で定義する．ただし, h は Theorem E.2.3 の可測関数である．

E.3 Riesz-Markov-Kakutani の定理

以下では, K を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．$C_0(K)$ を, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\{x \in K : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

が K のコンパクト部分集合となる K 上の複素数値連続関数全体からなる集合とすると, $C_0(K)$ は各点での和・スカラー積とノルム

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in K} |f(x)|$$

に関して Banach 空間となる ([34, p.70, Theorem 3.17] 参照). $\mathfrak{B}(K)$ を K の Borel 集合族とし, $M(K)$ を $\mathfrak{B}(K)$ 上の正則な複素 Borel 測度からなる集合とする．$M(K)$ は各 $B \in \mathfrak{B}(K)$ での和・スカラー積とノルム

$$\|\mu\|_{M(K)} \coloneqq |\mu|(K) \qquad (\mu \in M(K))$$

に関してノルム空間となる.

$\mu \in M(K)$ に対して,

$$f_\mu^* \colon C_0(K) \ni f \mapsto \int_K f \, d\mu \in \mathbb{C}$$

と定めると, $f_\mu^* \in C_0(K)^*$ かつ $\|f_\mu^*\|_{\mathrm{op}} = \|\mu\|_{M(K)}$ が成り立つ次の定理は $C_0(K)^*$ の元を特徴づける定理である ([34, p130–132, Theorem 6.19] 参照).

Theorem E.3.1 (Riesz-Markov-Kakutani の定理)**.** 任意の $f^* \in C_0(K)^*$ に対して,

$$f^* f = \int_K f \, d\mu \qquad (f \in C_0(K))$$
$$\|f^*\|_{\mathrm{op}} = \|\mu\|_{M(K)}$$

となる $\mu \in M(K)$ が唯一つ存在する.

Remark E.3.1. Theorem E.3.1 から,

$$M(K) \ni \mu \mapsto f_\mu^* \in C_0(K)^*$$

が全射複素線形等長作用素となることがわかる.

付録F　作用素環

近年の数理物理やトポロジーなどの研究で現れる C^*-環と von Neumann 環 (総称して**作用素環** (operator algebra) 呼ばれる) の定義について述べる[*47]．なお, 詳しく勉強したい場合は, [32, 37, 38, 39] などを参照されたい．また, von Neumann 環に関しては [26] などもある．非可換幾何にも興味がある場合は [18, 19] などがある[*48].

F.1　Banach 環

Definition F.1.1 (ノルム環)**.** $\mathscr{A}$ を $\mathbb{C}$ 上の多元環とする．このとき, 関数

$$\|\cdot\|_{\mathscr{A}} \colon \mathscr{A} \ni a \mapsto \|a\|_{\mathscr{A}} \in \mathbb{R}$$

が以下の性質 (N.1)–(N.5) をみたすとき, $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ を**ノルム** (norm) といい, ノルム $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ が定義された多元環 $\mathscr{A}$ を**ノルム環** (normed algebra) という．

(N.1) 任意の $a \in \mathscr{A}$ に対して, $\|a\|_{\mathscr{A}} \geq 0$.
(N.2) $\|a\|_{\mathscr{A}} = 0 \Leftrightarrow a = 0_{\mathscr{A}}$.
(N.3) 任意の $a \in \mathscr{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|a\|_{\mathscr{A}}$.
(N.4) 任意の $a, b \in \mathscr{A}$ に対して, $\|a+b\|_{\mathscr{A}} \leq \|a\|_{\mathscr{A}} + \|b\|_{\mathscr{A}}$.
(N.5) 任意の $a, b \in \mathscr{A}$ に対して, $\|ab\|_{\mathscr{A}} \leq \|a\|_{\mathscr{A}}\|b\|_{\mathscr{A}}$.

Definition F.1.2 (可換)**.** $\mathscr{A}$ を多元環とする．このとき, $a, b \in \mathscr{A}$ が

$$ab = ba$$

をみたすとき, a と b は**可換**であるという．また, $\mathscr{A}$ のすべての元が可換であるとき, $\mathscr{A}$ は**可換**であるという．

Definition F.1.3. $\mathscr{A}$ をノルム環とする．このとき, $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$ が

$$\begin{aligned} &a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a \qquad (a \in \mathscr{A}) \\ &\|\mathbf{1}\|_{\mathscr{A}} = 1 \end{aligned}$$

をみたすとき, $\mathbf{1}$ を $\mathscr{A}$ の**単位元**という．

Definition F.1.4 (Banach 環)**.** 完備なノルム環を **Banach 環** (Banach algebra) という．

Example F.1.1. K をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(K)$ を K 上の複素数値連続関数からなる集合とする．このとき, $C(K)$ は各点での和・スカラー積・積とノルム

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in K} |f(x)|$$

に関して単位元をもつ可換 Banach 環となる．

[*47] この節では, 環と言ったら多元環 (algebra) のことを指しており, 環 (ring) のことではないことに注意されたい.
[*48] 参考文献として挙げた 2 冊については著者である A. Connes が自身のホームページ `https://alainconnes.org/publications/` にて無料公開している．また, これら以外にも非可換幾何について書かれた本やプレプリントもある (例えば玉木大先生のサイト `http://pantodon.jp/index.rb?body=noncommutative_geometry_intro` を参照されたい).

Example F.1.2. K を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $C_0(K)$ を, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\{x \in K : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

が K のコンパクト部分集合となる K 上の複素数値連続関数全体からなる集合とする. このとき, $C_0(K)$ は各点での和・スカラー積・積とノルム

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in K} |f(x)|$$

に関して単位元をもたない Banach 環となる.

Example F.1.3. $\mathscr{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間とし, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ 上の有界作用素全体からなる集合とする. このとき, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ は Definition 2.1.2 で定義した和・スカラー積・積と作用素ノルムに関して, 単位元をもつ非可換 Banach 環となる.

Example F.1.4. $\mathscr{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間とし, $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ 上のコンパクト作用素全体からなる集合とする. このとき, $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ は Definition 2.1.2 で定義した和・スカラー積・積と作用素ノルムに関して, 単位元をもたない非可換 Banach 環となる.

Example F.1.5 (円板環). $\mathbb{D} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ $\overline{\mathbb{D}} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ とする. $A(\overline{\mathbb{D}})$ を $\mathbb{D}$ 上で正則となるような $\overline{\mathbb{D}}$ 上の連続関数全体からなる集合とする. このとき, $A(\overline{\mathbb{D}})$ は各点での和・スカラー積・積とノルム

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$$

に関して単位元をもつ可換 Banach 環となる. $A(\overline{\mathbb{D}})$ を**円板環** (disk algebra) という[*49].

Banach 環の一般論については, [10, 16, 28, 32] などを参照されたい.

F.2 Banach$*$-環

Definition F.2.1 ($*$-環). $\mathscr{A}$ を多元環とする. このとき, 写像

$$*\colon \mathscr{A} \ni a \mapsto a^* \in \mathscr{A}$$

が次をみたすとき, 写像 $*\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ を**対合** (involution) といい, $\mathscr{A}$ を $*$ **環** ($*$-algebra) という.

(i) 任意の $a \in \mathscr{A}$ に対して, $(a^*)^* = a$.
(ii) 任意の $a, b \in \mathscr{A}$ に対して, $(ab)^* = b^* a^*$.
(iii) 任意の $a, b \in \mathscr{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して, $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$.

Remark F.2.1. $*$-環 $\mathscr{A}$ の零元 $0_{\mathscr{A}}$ の対合 $0_{\mathscr{A}}^*$ については, $0_{\mathscr{A}}^* = 0_{\mathscr{A}}$ が成り立つ. また, $\mathscr{A}$ が単位元 $\mathbf{1}$ をもつならば, 単位元の対合 $\mathbf{1}^*$ については $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ が成り立つ.

Definition F.2.2 (Banach$*$-環). $\mathscr{A}$ を Banach 環とする. このとき, $\mathscr{A}$ が $*$-環であって,

$$\|a^*\|_{\mathscr{A}} = \|a\|_{\mathscr{A}} \qquad (a \in \mathscr{A})$$

[*49] 円板環がもついくつかの性質を抽象化した概念に**関数環** (function algebra) または**一様環** (uniform algebra) がある.

が成り立つとき, $\mathscr{A}$ を **Banach$*$-環** (Banach $*$-algebra) という.

Example F.2.1. Banach 環 $C(K)$ は, $f \in C(K)$ の対合 f^* を f の複素共役 $\overline{f}$ で定めると Banach$*$-環となる. Banach 環 $C_0(K)$ についても同様.

Example F.2.2. Banach 環 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ は, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ の対合を T の共役作用素 T^* で定めると, Proposition 2.3.2 から Banach$*$-環となる. また, Theorem 2.8.10 と Proposition 2.3.2 から, $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ も Banach$*$-環となる.

Example F.2.3. Banach 環 $A(\overline{\mathbb{D}})$ は, $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ の対合 f^* を

$$f^*(z) \coloneqq \overline{f(\overline{z})} \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}})$$

で定めると Banach$*$-環となる ([28, p.5, Example 1.1.7 (2)] 参照).

F.3 C^*-環

Definition F.3.1 (C^*-環)**.** $\mathscr{A}$ を Banach$*$-環とする. このとき,

$$\|aa^*\|_{\mathscr{A}} = \|a\|_{\mathscr{A}}^2 \qquad (a \in \mathscr{A})$$

をみたすとき, $\mathscr{A}$ を **C^*-環** (C^*-algebra) という.

Example F.3.1. Example F.1.1–F.1.4 の Banach$*$-環はすべて C^*-環である.

Remark F.3.1. 円板環 $A(\overline{\mathbb{D}})$ は C^*-環ではない. 実際, 任意の可換 C^*-環 $\mathscr{A}$ は, 単位元をもつならば, あるコンパクト Hausdorff 空間 $\Delta(\mathscr{A})$ が存在し, $\mathscr{A}$ と $C(\Delta M(\mathscr{A}))$ は $*$-等距離同型となる ([10, p.67, 定理 2.8.2] 参照) [*50] . また, 単位元をもたないならば, ある局所コンパクト Hausdorff 空間 $\Delta(\mathscr{A})$ が存在し, $\mathscr{A}$ と $C_0(\Delta(\mathscr{A}))$ は $*$-等距離同型となる ([28, p.69, Theorem 2.4.5] 参照).

非可換 C^*-環については次の定理が成り立つ ([32, p.94, Theorem 3.4.1] 参照).

Theorem F.3.1 (Gel'fand-Naĭmark の定理)**.** $\mathscr{A}$ を C^*-環とする. このとき, ある Hilbert 空間 $\mathscr{H}_{\mathscr{A}}$ が存在し, $\mathscr{A}$ は $\mathscr{B}(\mathscr{H}_{\mathscr{A}})$ の閉部分 $*$-環と $*$-等距離同型となる.

F.4 von Neumann 環

以下では, $\mathscr{H}$ は可分な複素 Hilbert 空間とする.

Definition F.4.1 (可換子集合)**.** $\mathscr{M}$ を $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ の部分集合とする.

$$\mathscr{M}' \coloneqq \{T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \,:\, TS = ST \ (\forall S \in \mathscr{M})\}$$

と定め, $\mathscr{M}'$ を**可換子集合** (commutant) という.

[*50] 一般に 2 つの C^*-環 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ が **$*$-等距離同型**であるとは, $T(a+b) = Ta + Tb$, $T(\alpha a) = \alpha Ta$, $T(ab) = (Ta)(Tb)$, $\|Ta\|_{\mathscr{B}} = \|a\|_{\mathscr{A}}$, $T(a^*) = (Ta)^*$ をみたす全射の写像 $T\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が存在することである.

Remark F.4.1. (1) $\mathscr{M}$ は $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ の部分環であり, $I \in \mathscr{M}'$ である. このことから, $\mathscr{M}'$ を $\mathscr{M}$ の**可換子環**ともいう ([2, p.63] 参照).

(2) $\mathscr{M}$ が自己共役集合, すなわち, $\mathscr{M}^* = \mathscr{M}$ ならば, $\mathscr{M}$ は $*$-部分環である ([2, p.63] 参照). ただし, $\mathscr{M}^* \coloneqq \{T^* : T \in \mathscr{M}\}$ である.

Definition F.4.2 (2 重可換子環)**.** $\mathscr{M}'$ の交換子環を

$$\mathscr{M}'' \coloneqq (\mathscr{M}')' = \{T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : TS = ST \ (\forall S \in \mathscr{M}')\}$$

と定め, $\mathscr{M}$ の **2 重可換子環**という.

次の命題は, 交換子環に関する命題である ([2, p.64, 命題 3.10] 参照).

Proposition F.4.1. $\mathscr{M}$ を $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ の $*$-部分環とする. このとき, $\mathscr{M} = \mathscr{M}''$ が成り立つならば, $\mathscr{M}$ は単位元をもつ C^*-環である.

この命題に基づいて, 次の定義を設ける ([2, p.64, 定義 3.11])

Definition F.4.3. $\mathscr{M}$ を $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ の $*$-部分環とする. $\mathscr{M} = \mathscr{M}''$ が成り立つとき, $\mathscr{M}$ を **von Neumann 環** (von Neumann algebra) という.

Example F.4.1. $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ は von Neumann 環である ([2, p.64, 例 3.12] 参照).

Remark F.4.2. 定義から, 単位元をもたない C^*-環は von Neumann 環ではない.

次の命題は, von Neumann 環が作用素ノルムによる位相よりも弱い位相で閉じていることを主張する ([2, p.66, 命題 3.16]).

Proposition F.4.2. $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ を von Neumann 環とする.

(i) $\mathscr{M}$ は強位相で閉じている. すなわち, $\{T_\alpha\} \subset \mathscr{M}$ を有向点族とし, $\operatorname{s-lim}_\alpha T_\alpha = T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ならば, $T \in \mathscr{M}$ である.

(ii) $\mathscr{M}$ は弱位相で閉じている. すなわち, $\{T_\alpha\} \subset \mathscr{M}$ を有向点族とし, $\operatorname{w-lim}_\alpha T_\alpha = T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ならば, $T \in \mathscr{M}$ である.

次の定理は von Neumann 環における基本的な定理の 1 つである ([2, p.67]).

Theorem F.4.1 (von Neumann の 2 重交換子定理)**.** $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ を $I \in \mathscr{M}$ となる $*$-部分環とする. このとき, 次の (i), (ii), (iii) は同値である.

(i) $\mathscr{M}$ は von Neumann 環である.
(ii) $\mathscr{M}$ は作用素の弱位相で閉じている.
(iii) $\mathscr{M}$ は作用素の強位相で閉じている.

参考文献

[1] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉書店 (2006).
[2] 新井朝雄, 量子統計力学の数理, 共立出版 (2008).
[3] 新井朝雄, ヒルベルト空間と量子力学, 増補改訂版, 共立出版 (2014).
[4] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (上), 増補改訂版, 日本評論社 (2017)
[5] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (下), 増補改訂版, 日本評論社 (2017)
[6] 新井朝雄, 江沢洋, 量子力学の数学的構造 I, 朝倉書店 (1999).
[7] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963).
[8] 宇佐美京介, 対相互作用模型の具体的な対角化について, 修士学位論文, 信州大学 (2021).
[9] 熊ノ郷準, 擬微分作用素, 岩波書店 (1974).
[10] 竹之内脩, 阪井章, 貴志一男, 神保敏弥, 関数環, 培風館 (1977)
[11] 中村周, 量子力学のスペクトル理論, 共立出版 (2012).
[12] 前田周一郎, 函数解析, 森北出版 (1974).
[13] 村上信吾, 多様体, 共立出版 (1989).
[14] 茂木勇, 伊藤光弘, 微分幾何学とゲージ理論 (復刊), 共立出版 (2001).
[15] J. von Neumann 著, 井上 健, 広重 徹, 恒藤 敏彦 翻訳, 量子力学の数学的基礎, みすず書房 (1957).
[16] A. Browder, Introduction to function algebras, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1969).
[17] J. B. Conway, A course in functional analysis, 2nd. ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1990).
[18] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, Inc., San Diego, CA (1994).
[19] A. Connes, M. Marcolli, Noncommutative geometry, quantum fields and motives, American Mathematical Society Colloquium Publications vol. 55, American Mathematical Society, Providence, RI; Hindustan Book Agency, New Delhi (2008).
[20] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1987).
[21] M. Dimassi and J. Sjöstrand, Spectral asymptotics in the semi-classical limit, London Math. Soc. Lecture Note Ser. (1999).
[22] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., **130** (1973), 309–317.
[23] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 16, (1955) 331pp.
[24] B. C. Hall, Quantum theory for mathematicians, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York (2013).
[25] K. Hannabuss, An introduction to quantum theory, Oxford Graduate Texts in Mathematics, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1997)
[26] V. F. R. Jones, Von Neumann Algebras, `https://math.berkeley.edu/~vfr/MATH20909/VonNeumann2009.pdf`

[27] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, Ann. of Math., **36** (1935), 719–723.

[28] E. Kaniuth, A course in commutative Banach algebras, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York (2009)

[29] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Reprint of the 1980 edition, Springer-Verlag, Berlin (1995)

[30] A. Martinez, An introduction to semiclassical and microlocal analysis, Universitext, Springer-Verlag, New York (2002).

[31] R. E. Megginson, An introduction to Banach space theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1998).

[32] G. J. Murphy, C^*-algebras and operator theory, Academic Press, Inc., Boston, MA (1990).

[33] J. von Neumann, Mathematical foundations of quantum mechanics, Princeton University Press, Princeton (1955).

[34] W. Rudin, Real and complex analysis, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York (1987).

[35] B. Simon, Trace ideals and their applications, 2nd ed., Mathematical Surveys and Monographs (2005).

[36] A. Szankowski, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ does not have the approximation property, Acta Math., **147** (1981), 89–108.

[37] M. Takesaki, Theory of operator algebras. I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 124, Reprint of the first (1979) edition, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5, Springer-Verlag, Berlin (2002).

[38] M. Takesaki, Theory of operator algebras. II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 125, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6, Springer-Verlag, Berlin (2003).

[39] M. Takesaki, Theory of operator algebras. III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 127, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 8, Springer-Verlag, Berlin (2003).