de Faria and de Meloの本によるセミナー1

九州大学IMI 学術研究員 日高 建

1　古典力学

1.1　ニュートン力学

定義 1.1. 集合 A を空でないとし，V をベクトル空間とする．$u \in V$ に対して，写像 $T_u : A \to A$ で以下を満たすものが与えられているとき，A は V を基準ベクトル空間とする**アフィン空間**という.

1. $T_u \circ T_v = T_{u+v}$ $(\forall u, v \in V)$

2. 任意の P, $Q \in A$ に対して，$T_v(P) = Q$ を満たす $v \in V$ がただ一つ存在する.

$T_v(P) = P + v$ と書く．2. のとき，$P + v = Q$ または $v = Q - P$ と書く.

定義 1.2 (アフィン写像)**.** A, A' を V, V' をそれぞれ基準ベクトル空間とするアフィン空間とする．$f : A \to A'$ に対して，ある線形写像 $L_f : V \to V'$ が存在して，

$$f(P + u) = f(P) + L_f u \quad (\forall P \in A, \forall u \in V)$$

が成り立つとき，f を**アフィン写像**という.

以下，ニュートン時空 S を導入する．S は $\mathbb{R}^4$ を基準ベクトル空間とするアフィン空間とする．S の点を**事象**という.

定義 1.3. 時空 S 上には全射なアフィン写像 $\tau : S \to \mathbb{R}$ が定義されている．$\tau(p) = \tau(q)$ のとき，p と q は**同時事象**であるという.
$\Delta\tau(p, q) := \tau(q) - \tau(p)$ を事象 p と q の**時間間隔**という.

$$E_t = \{p \in S | \tau(p) = t\}$$

時刻 t における事象空間という．$p, q \in E_t$ に対して，$p - q \in \mathbb{R}^4$ のユークリッドノルム $\Delta s(p, q) := \|p - q\|_{\mathbb{R}^4}$ を p と q の**同時事象間の距離**という.

定義 1.4 (ガリレイ変換)**.** 全単射なアフィン写像 $\alpha : S \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ で，$\alpha(p) = (x^1, x^2, x^3, t), \quad \alpha(q) = (y^1, y^2, y^3, s)$ に対して，

$$\Delta\tau(p,q) = s - t,$$
$$\Delta s(p,q)^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 \quad (\Delta\tau(p,q) = 0 \text{ のとき})$$

を満たすとき，α をニュートン時空 S 上の**慣性系**であるといい，S 上の慣性系 α, β に対し，$\beta \ \circ \alpha^{-1}$ を**ガリレイ変換**という．

命題 1.5. ニュートン時空 S 上のガリレイ変換全体は群になる．この群を**ガリレイ群**という．

g_1, g_2 をガリレイ変換とする．$g_1 \circ g_2$ もガリレイ変換になることを確認する．S 上の慣性系 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ が存在し，

$$g_1 = \beta \circ \alpha^{-1}, \ \ g_2 = \beta_2 \circ \alpha_2^{-1}$$

となる．$\gamma := \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_2$ とおくと，γ はアフィン写像であり，$g_1 \circ g_2 = \gamma \circ \alpha_2^{-1}$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\gamma(q)^4 - \gamma(p)^4 &= \beta_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(q))^4 - \beta_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(p))^4 \\
&= \tau(\alpha^{-1} \circ \beta_2(p), \alpha_1^{-1} \circ \beta_2(q)) \\
&= \alpha_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(q))^4 - \alpha_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(p))^4 \\
&= \beta_2(q)^4 - \beta_2(p)^4 = \tau(p,q).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}(\gamma(q)^i - \gamma(p)^i)^2 &= \sum_{i=1}^{3}(\beta_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(q))^i - \beta_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(p))^i)^2 \\
&= \Delta s^2(\alpha^{-1} \circ \beta_2(p), \alpha_1^{-1} \circ \beta_2(q)) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\alpha_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(q))^i - \alpha_1(\alpha_1^{-1} \circ \beta_2(p))^i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\beta_2(q)^i - \beta_2(p)^i)^2 = \Delta s^2(p,q).
\end{aligned}$$

□

命題 1.6. ガリレイ変換 g に対して，

$$g(x,t) = (x', t') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

とすると，$t_0 \in \mathbb{R}, a, v \in \mathbb{R}^3$ と $A \in O(3)$ が存在し，

$$t' = t + t_0,$$
$$x' = Ax + a + tv$$

が成り立つ．ガリレイ群は 10 次元 Lie 群である．

$g(0,0)=(a,t_0)$ とおく．また，$L(x,t):=g(x,t)-g(0,0)$ とすると，$L\in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$．$L(1,0)=(v,\alpha)$, $L(0,x)=(Ax,l(x))$ とおく．このとき，$A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $l:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は線形である．また，

$$g(x,t)=(Ax+vt+a,\alpha t+l(x)+t_0)$$

と書ける．$(x',t')=g(x,t)$, $(x'',t'')=g(x_1,t_1)$ とすると，$t'-t''=\alpha(t-t_1)+l(x-x_1)$. 一方，$t'-t''=t-t_1$. $x=x_1$ とすれば，$\alpha=1$，$x_1=0$ とすれば，$l(x)=0$ が分かる．$\|g(x,t)-g(0,t)\|^2_{\mathbb{R}^4}=\|Ax\|^2_{\mathbb{R}^3}$. また，$\|g(x,t)-g(0,t)\|^2_{\mathbb{R}^4}=\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}$ であり，A は線形写像であるから，$A\in O(3)$.

慣性系では，等速直線運動は $t\to(x(t),t+t_0)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ である．上記のガリレイ変換の表示から，次の命題が分かる．

命題 1.7. ガリレイ変換は等速直線運動を等速直線運動に写す.

1.2 ニュートンの配位空間

定義 1.8. 拘束されていない N 個の粒子の**配位空間**は

$$M=\{(x_1,...,x_N)\mid x_i\in\mathbb{R}^3,\forall i\}\equiv\mathbb{R}^{3N}.$$

で与えられる.

ニュートンの運動第二法則

$$m\ddot{x}_i=F_i(x_1,...,x_N,\dot{x}_1,...,\dot{x}_N).$$

ここで，$F:M\to\mathbb{R}^3$ は力と呼ばれる関数である.

定義 1.9. $V:M\to\mathbb{R}$,

$$F_i=-\nabla_i V\quad\forall i=1,...,N$$

を満たす V を**ポテンシャル**という．ポテンシャルが存在する場合，ニュートン系は**保存系**であるという.

定義 1.10.

$$T:=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i\left\{(\dot{x}_i^1)^2+(\dot{x}_i^2)^2+(\dot{x}_i^3)^2\right\}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i\langle\dot{x}_i,\dot{x}_i\rangle$$

を**運動エネルギー**という.

$$E:=T+V$$

を (保存系の) **全エネルギー**という.

命題 1.11 (エネルギー保存則)**.** 保存系では，エネルギー保存則 $dE/dt=0$ が成り立つ.

$$\because\quad\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^N m_i\langle\dot{x}_i,\ddot{x}_i\rangle+\sum_{i=1}^N\langle\nabla_i V,\dot{x}_i\rangle=0$$

1.3 ラグランジュ形式

定義 1.12. $M \subset \mathbb{R}^{3N}$ を部分多様体とする．接バンドル TM を**ラグランジュ相空間**という．**ラグランジュ関数**と呼ばれる滑らかな $L : TM \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

を**ラグランジュ関数 (ラグランジアン)**L **に対する作用汎関数**という．ここで，$\gamma : I \to M$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ は連続的微分可能とする．

定義 1.13. $\gamma : I \to M$ に対して

$$\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times I \to M$$

$$\tilde{\gamma}(0, t) = \gamma(t), \quad \tilde{\gamma}(s, a) = \gamma(a), \quad \tilde{\gamma}(s, b) = \gamma(b), \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$$

を満たす $\tilde{\gamma}$ を γ の**変分**という．$\gamma_s = \tilde{\gamma}(s, \cdot) : I \to M$ と書く．

定義 1.14. 作用 S と曲線族 γ_s に対して，

$$\delta S(\gamma) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} S(\gamma_s)$$

を γ における S の**第一変分**という．

定義 1.15. $\delta S(\gamma) = 0$ となる γ を作用 S の**臨界点**という．

定理 1.16 (オイラー–ラグランジュ方程式)**.** $\gamma = (q^1, ..., q^n)$ が L に対する作用 S の臨界点ならば，

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) = 0$$

が成り立つ．

証明の概略：

$$\delta S(\gamma) = \int_a^b \delta L(\gamma, \dot{\gamma})dt$$

が成り立つ．ここで，

$$\delta L(\gamma, \dot{\gamma}) = DL(\gamma, \dot{\gamma})(\delta\gamma, \delta\dot{\gamma}),$$

$$\delta\gamma = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \gamma_s, \quad \delta\dot{\gamma} = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \dot{\gamma}_s$$

$\delta\gamma = (\delta q^1, ..., \delta q^n)$, $\delta\dot{\gamma} = (\delta\dot{q}^1, ..., \delta\dot{q}^n)$ と座標表示すると，

$$\begin{aligned}\delta S(\gamma) &= \int_a^b DL(\gamma, \dot{\gamma})(\delta\gamma, \delta\dot{\gamma})dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q})\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q})\delta\dot{q}^i\right)dt\end{aligned}$$

$\delta\dot{q}_i = d(\delta q^i)/dt$，$\delta q^i(a) = \delta q^i(b) = 0$ に注意して部分積分すると，

$$\delta S(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right) \right\} \delta q^i dt.$$

よって，$\delta S(\gamma) = 0$ と δq^i の任意性から

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) = 0. \quad \square$$

保存系における n 次元ラグランジュ系は次からなる．

1. n 次元リーマン多様体 M
2. ポテンシャル $V : M \to \mathbb{R}$
3. 運動エネルギーと呼ばれる TM_q 上の二次形式 $T_q : TM_q \to \mathbb{R}$

   $$T_q(v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_q = \frac{1}{2}\|v\|_q^2.$$

   $\langle \cdot, \cdot \rangle : TM_q \times TM_q \to \mathbb{R}$, リーマン計量から定まる内積
4. ラグランジュ関数（ラグランジアン）$L : TM \to \mathbb{R}$,

   $$L(q, v) = T_q(v) - V(q).$$

保存系における N 粒子ニュートン系をラグランジュ系で考える．$M = \mathbb{R}^{3N}$ 上の計量

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^1 w_i^1 + v_i^2 w_i^2 + v_i^3 w_i^3).$$

ラグランジアン

$$L(q, v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i ((v_i^1)^2 + (v_i^2)^2 + (v_i^3)^2) - V(q)$$

オイラーラグランジュ方程式からニュートンの運動方程式が再現される．