参考文集
信州大学数理科学談話会

講演 1
0 を 0 で割る — 微積分の黎明

・微積分のはじまり
・パップスの問題
パップスは 4 世紀ころのギリシアのひと。『数学輯録』（全 8 巻）の著者。
・0 を 0 で割る。・リボン曲線の発見
・虚数とは
・円と三角関数。リボン曲線と楕円関数
・鶴亀算と連立方程式
・パップスの問題とデカルトの代数学
・直角三角形の基本定理
・曲っているものは曲っていない
・無限小の辺のつらなる無限多角形
・曲線の解析的源泉
・「無限小」から「限りなく近づく」へ
・0 より大きくなく、0 より小さくなく、0 に等しくもないもの
・負数の対数と虚数の対数
・ヨハン・ベルヌーイの美しい発見

● 曲線に法線を引く（デカルト『幾何学』より）
《曲線のすべての性質を見いだすためには、そのすべての点が直線の点にたいしてもつ関係を知り、また、その曲線上のすべての点でこれを直角に切る他の線をひく方法を知れば十分である。》

● 曲線を無限多角形と見る（ライプニッツ）
(ライプニッツ「分数量にも無理量にもさまたげられることのない極大・極小ならびに接線を求めるための新しい方法．およびそれらのための特異な計算法」(1684 年) より
《接線を見出すということは本来，曲線上の無限に小さい距離を持つ 2 点を結ぶ直線を引くこと，つまり私たちにとっては曲線と同値である無限個の角を持つ多角形の 1 辺を引くことであると見さえするならば，いつも成功するとは限らない特別な仮定なども受けることなく，汎通的な方法によって行なわれるのである.》

● 曲線の根底に関数を見る（オイラー）
オイラー『無限解析序説』第 2 巻 (1748 年) より
《点の連続的な運動により曲線が機械的に描かれていき，そのようにして曲線の全容が

全体として目に見えるように与えられることがある．そのような曲線は多い．だが，それはそれとしてここでは主として，それらの曲線の解析的源泉，すなわちはるかに広範な世界に向うことを許し，しかも計算を遂行するうえでもはるかに便利な源泉を関数と見て，その視点から考察を加えていきたいと思う．そうすると x の任意の関数はある種の曲線を与えることになる．逆に，曲線を関数に帰着させていくことも可能になる.》（「解析的源泉」の原語は origo analytica）

● 0 を 0 で割る
オイラー『微分計算教程』より
《$\cdots$ 量というものはすべて，完全に消滅して 0 となるまで，どこまでも減少していくことが可能である．ところが無限小量は消滅しつつある量にすぎない．したがって実際には 0 に等しいのである．無限小の定義によれば，無限小量というのは指定されたあらゆる量よりも小さい量のことだが，この定義もまたこの状勢と足並みをそろえている．実際，もしある量が，指定されたあらゆる量よりも小さいという様式で小さいとするなら，その量はたしかに 0 でないわけにはいかない．なぜなら，もしその量が 0 に等しくないとするなら，それに等しい量を指定することが可能になることになるが，これは仮定に反するのである.》
《この［無限小という］理念には，一般に信じられているような神秘は何も隠れていない.》
《無限小計算では，ただ単にさまざまな無限小の間の幾何的比率を見つけ出そうとする作業が行われるにすぎない.》
《相異なる無限小 dx と dy があるとしよう．これらはともに 0 に等しいとはいうものの，それらの比は知られていない．そうして微分計算のすべての力は，このような二つの無限小の間の比の探究に向けられているのである.》

● $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ は正しいか
『数学雑誌』（数理学館），第 3 号（明治 19 年=1886 年 12 月 17 日発行。月刊誌），「雑報」より

> 近頃某学校にて或教員が授業の際ふと椿事を生ぜり。即ち茲に $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}$ 式と $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}$ 式とあり。両式ともに尋常の如く代数上の変化を施せば $\sqrt{\dfrac{2}{3}\times(-1)}$ となる。即ち $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{(-1)}$ を得る。然るに第二式は之を
>
> $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{-1}}{\sqrt{3}(\sqrt{-1})^2}=-\frac{\sqrt{2}\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}$$
>
> となして不可なきに似たり。因て第二式は二件の値を顕はせるを以て大に怪しみ之を同校中の人に談せしに或は一件の値を正答なりと云ひ、或は二件の値を正答と云ふもありしと。果して何れを正とするや。記して諸君の論定を待つ。

● 何かしら秘められたもの（カルダノ）
カルダノ『大技術，あるいは代数学の法則について（アルス・マグナ）』（1545 年）より
《$\sqrt{-9}$ は $+3$ でも -3 でもなく，何かしら秘められた第 3 の種類のものである.》

● 何かしらありえないもの（オイラーの言葉）
オイラー「方程式の虚根の研究」（1749/51 年）より
《これらの（代数方程式の）根のすべてが実量になるわけではなく，それらのうちのいくつかが虚量であったり，あるいはまたすべての根が虚量であったりするという事態はひんぱんに起る.》
《ゼロより大きくなく，ゼロより小さくなく，ゼロに等しくもない量は虚量と呼ばれる. それゆえ，それは何かしらありえないものである.》

● ヨハン・ベルヌーイの発見
ヨハン・ベルヌーイの書簡より
微分式 $\dfrac{adz}{b^2+z^2}$ は変数変換

$$t = \frac{-z\sqrt{-1}+b}{z\sqrt{-1}+b}$$

により虚対数の微分 $-\dfrac{adt}{2bt\sqrt{-1}}$ に移行する.

● 「円の面積を虚対数に帰着させるベルヌーイの美しい発見」（オイラーの言葉）

$$\frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$$

● 対数の無限多価性の認識（オイラー）
オイラーの論文「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」（1749/51 年）より
《だが，この観念には一般に，この観念に適合しないある状勢が伴っている. それは，ほとんど気づかれることはないが，各々の数に対応する対数はただひとつしかないと，通常は想定されているという事実である. そうして，そのことをほんのわずかでも考えてみれば，対数の理論が困惑させられているように見えるあらゆる困難や矛盾が成立するのは，各々の数に対してただひとつの対数しか対応しないと想定するかぎりにおいてのことであることがわかる. そこで私は，これらの困難と矛盾のすべてを消失させるために，与えられた定義そのものに基づいて，各々の数に対して無限に多くの対数が対応すると主張する.》