講演 2

原始根の神秘 －数論の泉

・二つのディオファントス
・フェルマの欄外ノート
・直角三角形の基本定理
・フェルマの小定理
・原始根の発見
・平方剰余相互法則
・アリトメチカの一真理の発見
・数域の拡大

● 「アリトメチカの一真理」の発見（ガウス）
ガウス『アリトメチカ研究』(1801 年)
原書名 Disquisitiones Arithmeticae（D.A.）
D.A. の「緒言」より
《. . . そのような日々の中で，私はゆくりなくあるすばらしいアリトメチカの真理に出会ったのである．私はその真理自体にもこの上もない美しさを感じたが，そればかりではなく，それはなおいっそうすばらしい他の数々の真理とも関連があるように思われた．そこで私は全力を傾けて，その心理が依拠している諸原理を洞察し，厳密な証明を獲得するべく考察を重ねた．やがて私はついに望みどおりの成功をおさめたが，そのころにはこのような研究の魅力にすっかり取り付かれてしまい，もう立ち去ることはできなかった．こうしてひとつの真理はいつももうひとつの真理への道を開くというふうで，. . .》

● 数域の拡大の決意（ガウス）
ガウス「4 次剰余の理論 第 2 論文」(1832 年)
《われわれはすでに 1805 年にこのテーマについて熟考を開始したが，それからすぐに，. . . 一般理論の真実の泉の探索は，アリトメチカの領域を拡大して，その中で行わなければならないという確信に到達した.》
《事のついでに，ここではせめて，このように定められた領域（註．複素整数域 = ガウス整数域）は 4 次剰余の理論のために特に適切であることに留意するとよい．同様にして，3 次剰余の理論は $a + bh$ という形の数の考察を基礎にして，その土台の上に建てなければならない．ここで，h は方程式 $h^3 - 1 = 0$ の虚根，たとえば $h = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{4}} \cdot i$ である．同様に，いっそう高次の冪剰余の理論では他の虚量の導入が要請される.》

● 直角三角形の基本定理の発見（フェルマ）
フェルマの書簡より フェルマからフレニクルへ (1641 年 6 月 15 日)
《直角三角形の基本定理というのは，4 の倍数よりも 1 だけ大きい素数はどれも二つの平方数で作られるというものです.》