アソシエーションスキームの複素既約表現の計算

花木章秀 (信州大学理学部)

Dedicated to the memory of Masaaki Kitazume

1. はじめに

金沢大学で行われた 2019 年秋の学会の代数分科会での伊東–宗政の講演 “Nearly multiplicity-free for imprimitive permutation groups” を聞いて、私なりに考えたことを書きたい。本質的なことは、内部自己同型 (行列の相似変換) による自由度のために一意的でないアソシエーションスキームの複素既約表現を何らかの形で決定することにある。雑に言ってしまえば「既約表現を具体的に計算する方法を考える」ということと理解する。このためには原始べき等元を求めればよいことになる。

ここで述べる手法は、常にできるわけではないが、ある仮定をみたす部分群の列が存在し、それを見つけられれば有限群の表現にも適用される。新しいことは全く無く、知られていることを組み合わせるだけなのであるが、このような計算方法は少なくとも私は文献などで見たことはない。文書として残しておく価値もいくらかはあるだろう。

本稿ではいつも私が使っている用語や記号の説明はしない。適当な文献を参照して欲しい。アソシエションスキームは可換性を仮定しない。表現はすべて複素表現を意味するものとし、加群は右加群とする。また、代数や加群はすべて有限次元のもののみを考える。

2. 半単純代数の既約表現とべき等元

代数の表現論においては基本的なことではあるが、組合せ論の人にも理解しやすいように半単純代数の既約表現とべき等元について簡単にまとめておく。詳しくは、例えば [2, 4] あたりを参照して欲しい。

A を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純代数とする。Wedderburn の構造定理 [2, Theorem 2.4.3] によって

$$A \cong \bigoplus_{i=0}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C}) \qquad (1)$$

と表すことができる。右辺の各成分への射影が A の既約表現の同値類の代表となる。既約表現のトレースが既約指標である。既約指標は表現の同値類上で一定であり完全に決定できるが、既約表現は内部自己同型 (行列の相似) による自由度をもつ。(1) の同型は右辺の各成分の内部自己同型と次数 n_i が等しい成分の入れ替えだけの自由度を持っている。

一般の代数 A に対して $e^2 = e$ となる $e \in A$ を**べき等元**という。二つのべき等元 e, f が**直交する**とは $ef = fe = 0$ となることとする。べき等元 e が直交する 0

hanaki@shinshu-u.ac.jp (2019 年有限群草津セミナー、報告集のみの参加).

でない二つのべき等元の和に表せないとき、e を**原始べき等元**という。べき等元 e がいくつかの互いに直交する 0 でないべき等元の和に

$$e = e_1 + \cdots + e_\ell$$

と表されるとき、これを e の**べき等元分解**という。特にすべての e_i が原始的であるとき**原始べき等元分解**という。A が有限次元であるとき、任意の 0 でないべき等元は原始べき等元分解をもつが、一般にそれは一意的ではない。

例 2.1. 全行列環 $M_n(\mathbb{C})$ において、$I = E_{11} + \cdots + E_{nn}$ は単位元 (単位行列) I の原始べき等元分解である。ただしここで E_{ii} は行列単位を表すこととする。正則行列 P に対して $I = P^{-1}E_{11}P + \cdots + P^{-1}E_{nn}P$ も原始べき等元分解であり、逆に任意の原始べき等元分解はこのように書くことができる。

A の中心 $Z(A)$ のべき等元を A の**中心的べき等元**、$Z(A)$ の原始べき等元を A の**中心的原始べき等元**という。べき等元分解に現れるべき等元がすべて中心的であるとき、それを**中心的べき等元分解**、すべて中心的原始べき等元であるとき、それを**中心的原始べき等元分解**という。中心的原始べき等元分解は一意的である。

例 2.2. (1) において、単位元を各成分の単位行列の和に表せば、それが単位元の中心的原始べき等元分解である。これを更に各成分の行列単位に分けたものが原始べき等元分解である。

ここで再び A を半単純代数と仮定する。$1 = e_1 + \cdots + e_\ell$ を 1 の中心的原始べき等元分解とする。$e_1, \ldots, e_\ell$ が A の中心的原始べき等元のすべてであり、中心的原始べき等元 e_i は既約表現に対応する。その表現加群を V_i と表すことにする。任意の原始べき等元 f に対して $fe_i \neq 0$ となる中心的原始べき等元 e_i がただ一つ存在する。このとき A-加群として $fA \cong V_i$ である。f をべき等元とし、その原始べき等元分解を $f = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} f_j^{(i)}$, $f_j^{(i)}A \cong V_i$ とすると $fA \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} d_i V_i$ である。べき等元 f の原始べき等元分解は完全可約 A-加群 fA の直和分解に対応している。特に f が原始べき等元であることと fA が既約 A-加群であることは同値である。

3. 良い性質をもつ閉部分集合を使った既約表現の構成

(X, S) をアソシエーションスキームとする。単に S をアソシエーションスキームとも言うことにする。T を (X, S) の閉部分集合とする。T は (X, S) の部分スキームを定める。記号の乱用を許してこれをまた T と表す[1]。

二つの指標 φ, ψ の既約分解を $\varphi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} a_\chi \chi$, $\psi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} b_\chi \chi$ とする。このとき $(\varphi, \psi)_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} a_\chi b_\chi$ と定める。$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対しては $(\varphi, \chi)_S$ は φ における χ の重複度である。

T を閉部分集合とし φ を T の指標とする。T から S への**誘導指標** φ^S とは、φ を与える $\mathbb{C}T$-加群 W を用いて $W \otimes_{\mathbb{C}T} \mathbb{C}S$ で定まる $\mathbb{C}S$-加群の指標である。φ の表現加群が $f \in \mathbb{C}T$ を用いて $f\mathbb{C}T$ と表すことができるとき、その誘導は $f\mathbb{C}T \otimes_{\mathbb{C}T} \mathbb{C}S \cong f\mathbb{C}S$ である。χ を S の指標とするとき、その T への**制限指標** χ_T とは、単に定義域を T に制限したものであり、これはまた T の指標となる。Frobenius の相互律 $(\varphi^S, \chi)_S = (\varphi, \chi_T)_T$ が成り立つ。

[1]閉部分集合は同型を許しても部分スキームを一意には決定しない。しかしそれらは代数的には同型であり、その違いは表現論においては問題にならない。

$\mathbb{C}S$ における 1 の中心的原始べき等元分解は

$$1 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} e_\chi, \qquad e_\chi = \frac{m_\chi}{|X|} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_{s^*}) \sigma_s$$

であることがよく知られている。

(X, S) の**標準指標**を γ_S で表す。すなわち $\gamma_S(\sigma_s) = \delta_{s1}|X|$ $(s \in S)$ を $\mathbb{C}S$ に線形に拡張したものである。標準指標の既約分解は $\gamma_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$ である。指標 φ が $\mathbb{C}S$ のべき等元 f を用いて $f\mathbb{C}S$ と表される $\mathbb{C}S$-加群によって与えられるとき $(\varphi, \chi)_S = m_\chi^{-1} \mathrm{rank}(fe_\chi) = m_\chi^{-1} \gamma_S(fe_\chi)$ である。

T を (X, S) の閉部分集合とする。

$$e_T = \frac{1}{n_T} \sum_{t \in T} \sigma_t$$

とおけば、これは $\mathbb{C}S$ のべき等元となり、更に $\mathbb{C}T$ のべき等元と見れば自明な指標 1_T に対応する中心的原始べき等元である。したがって、誘導指標 ${1_T}^S$ に対応する $\mathbb{C}S$-加群は $e_T\mathbb{C}S$ である[2]。

以上をまとめて、次の補題を得る。

補題 3.1. アソシエーションスキーム (X, S) の閉部分集合 T と $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して $({1_T}^S, \chi)_S = m_\chi^{-1} \gamma_S(e_T e_\chi)$ である。

一般のべき等元に関する簡単な補題も用意する。

補題 3.2. e, f を互いに異なるべき等元で $ef = fe = e$ を満たすものとする。このとき $f = e + (f - e)$ は f のべき等元分解である。

補題 3.2 を用いて次の結果を得る。

命題 3.3. T, U をアソシエーションスキーム (X, S) の閉部分集合で $T \subset U$ となるものとする。また $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ とする。

(1) $e_U e_T = e_T e_U = e_U$ である。
(2) $({1_T}^S, \chi)_S = ({1_U}^S, \chi)_S + a$ とすると $a \geq 0$ であって $e_\chi(e_T - e_U)$ は a 個の互いに直交する原始べき等元の和になる。特に $a = 1$ ならば $e_\chi(e_T - e_U)$ は指標 χ に対応する原始べき等元である。

命題 3.3 によって $({1_T}^S, \chi)_S = ({1_U}^S, \chi)_S + 1$ となる閉部分集合 T, U が存在すれば指標 χ に対応する原始べき等元を見つけることができる。これが本質的に重要なことなのであるが、参考のために、その後の計算についても記しておく。

命題 3.3 で $a = 1$ となる閉部分集合 T, U が存在するとし、$e = e_\chi(e_T - e_U)$ をそれによって得られる原始べき等元とする。$e\mathbb{C}S$ は指標 χ を与える既約 $\mathbb{C}S$-加群である。$e\mathbb{C}S$ の基底は計算できるのでそれを求め、それに対する σ_s の作用を調べれば具体的に既約表現が得られる。

すべての既約指標について、このようにして既約表現が得られた[3]とすれば、同型

$$\mathbb{C}S \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} M_{\chi(1)}(\mathbb{C})$$

を完全に書き下すことができる。

[2] S が thin、すなわち有限群の場合は、群 S と部分群 T で定まる置換指標、置換加群である。
[3] 用いる閉部分集合の列は同じである必要はない。

以上で、既約表現を具体的に書き下すことは可能であるが、$e\mathbb{C}S$ の基底のとり方に自由度があり、何らかの理論を考えようとする場合には使いにくいかもしれない。以下の状況では閉部分集合だけで既約表現をほぼ完全に決定することができる。

閉部分集合の列 $1 = T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_{\chi(1)-1} \subset T_{\chi(1)}$ で

$$({1_{T_{i+1}}}^S, \chi)_S = ({1_{T_i}}^S, \chi)_S - 1, \quad i = 1, \ldots, \chi(1) - 1$$

なるものが存在すると仮定する。このとき、各 T_i, T_{i+1} から原始べき等元が得られ、原始べき等元分解

$$e_\chi = e_1 + \cdots + e_{\chi(1)}$$

が得られる。$\dim_{\mathbb{C}} e_1\mathbb{C}Se_i = 1$ なので、その基底を v_i とし、$e_1\mathbb{C}S$ の基底 $v_1, \ldots, v_{\chi(1)}$ を作る (ここにスカラー倍の自由度が生じる)。この基底による表現を考えれば e_i は行列単位 E_{ii} に対応することが確認できる。(E_{ij} は $e_i\mathbb{C}Se_j$ の基底になるがスカラー倍が分からないので上のようにする。)

伊東–宗政の講演では、置換群とそれによって定義されるシュアー的アソシエーションスキームの表現を考えているので、ここで説明した内容が当てはまらないように見えるかもしれないが、以下のようにして適用することができる。有限群 G とその部分群 H で定義されるアソシエーションスキーム、すなわち G の $H\backslash G$ への可移な作用で定義されるアソシエーションスキーム、を考える。このとき隣接代数は $e_H\mathbb{C}Ge_H$ と自然に同型となり、またべき等元の間にも自然な対応が得られる (例えば [1] や [3] を参照)。$H \leq K \leq G$ を部分群の列とすると、上で考えたべき等元 $e_\chi(e_H - e_K)$ は $e_H\mathbb{C}Ge_H$ のべき等元となり、これまでの議論がすべてうまく行く。

4. 終わりに

伊東–宗政の講演では、すべての指標に対して同じ閉部分集合の列を考えていたようで、そのために適用できる例が少なくなっていたように感じる。もちろん、応用を考える上ではそれによる恩恵もあるのかもしれない。今後、具体例や応用例を考えてみたい。

最後になりましたが、北詰正顕先生のご冥福を心よりお祈り申し上げます。

References

[1] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1981.
[2] Yu. A. Drozd and V. V. Kirichenko, *Finite-dimensional algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[3] A. Hanaki and M. Hirasaka, *Theory of Hecke algebras to association schemes*, SUT J. Math. **38** (2002), no. 1, 61–66.
[4] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.