

体論・筆答レポート (第二回 2016/01/25)

1. L/K を体の拡大とし、 $G = \text{Aut}(L/K)$ とする。[5 点 \times 2]
 - (1) G の部分群 H に対してその不変体 L^H の定義を書け。
 - (2) L/K の中間体 M に対してその不変群 G^M の定義を書け。
2. 体のガロア拡大 L/K を考え、そのガロア群を $G = \text{Gal}(L/K)$ とする。 L/K の中間体 M に対してその不変群を G^M とする。 M/K がガロア拡大であるならば G^M は G の正規部分群であることを示せ。[5 点]
3. 体の拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ を考える。[5 点 \times 3]
 - (1) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。
 - (2) ガロア群 $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - (3) ガロア群 G のすべての部分群と拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ。
4. $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ を考える。[5 点 \times 3]
 - (1) $f(x)$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体 K を求めよ。
 - (2) ガロア群 $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - (3) ガロア群 G のすべての部分群と拡大 K/\mathbb{Q} の中間体をすべて求めよ。
5. \mathbb{F}_q で q 元体 (ちょうど q 個の元をもつ体) を表す。[5 点 \times 2]
 - (1) \mathbb{F}_2 上 3 次の既約多項式をすべて求めよ。
 - (2) ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{F}_8/\mathbb{F}_2)$ を求めよ。
6. 円分多項式 (円周等分多項式) $\Phi_i(x)$ を $1 \leq i \leq 6$ の範囲ですべて求めよ。[5 点]

[5 点 \times 12 = 60 点満点]