体論・筆答レポート (第二回 2020/01/23)

1. ガロア理論の基本定理 (ガロアの基本定理) をなるべく正確に、丁寧に書け。[10 点]

2. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ とする。次の問に答えよ。 (答えのみでもよい。) [5 点 × 2]

   (1) ガロア拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。

   (2) (1) で求めた G のそれぞれの部分群に対して、その不変体を求めよ。

3. $\zeta = e^{2\pi i/7}$ (複素数体 $\mathbb{C}$ における 1 の原始 7 乗根) とする。次の問に答えよ。(計算の過程も書くこと。) [5 点 × 3]

   (1) ガロア拡大 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。

   (2) (1) で求めた G のそれぞれの部分群に対して、その不変体を求めよ。

   (3) (2) で求めた不変体のうち $\mathbb{Q}$ 上 2 次体であるものについて、それを 整数 n を用いて $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ の形に表せ。

4. 自然数 q に対して $\mathbb{F}_q$ で q 元体を表すものとする。次の問に答えよ。(答えのみでもよい。) [5 点 × 2]

   (1) ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{4^6}/\mathbb{F}_4)$ を求めよ。

   (2) $\mathbb{F}_{4^6}/\mathbb{F}_4$ の中間体をすべて求めよ。

5. 次のような具体例を書け。(説明不要。) [2 点 × 5]

   (1) 代数的閉体。

   (2) 素体。(体 K で、その素体が K 自身であるもの。)

   (3) 体の列 $K \subset M \subsetneq L$ で L/K は無限次拡大で、L/M が有限次拡大であるもの。

   (4) 体の列 $K \subset M \subset L$ で L/M と M/K はガロア拡大であり、L/K がガロア拡大ではないもの。

   (5) 体の列 $K \subset M \subset L$ で L/K はガロア拡大であり、M/K がガロア拡大ではないもの。

6. $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的であるとし、その $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を $m(x)$ とする。$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について、$f(\alpha) = 0$ であることと、$f(x) = m(x)h(x)$ となる $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在することは同値であることを示せ。[5 点]

[10 点 + (5 点 × 8) + (2 点 × 5) = 60 点満点]