

体論・筆答レポート (第一回 2021/11/18)

- 次の問いに答えよ。(2) 以外は答えのみでもよい。 [5 点 × 4]
 - $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であることを示せ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ の \mathbb{Q} -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ を求めよ。
- $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$ を求めよ。(答えのみでもよい。) [5 点]
- 次の多項式が分離的であるかどうかを判定せよ。(根拠も書くこと。答えのみでは採点しない。) [5 点 × 2]
 - $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4$
 - $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$
- $K \subset M \subset L$ を体の列とし $[L : M] = m < \infty$, $[M : K] = n < \infty$ とする。このとき $[L : K] = mn$ であることを示せ。 [5 点]
- 体の有限次拡大は代数的拡大であることを示せ。 [5 点]
- $K \subset M \subset L$ を体の列とする。 L/K が正規拡大であるならば L/M も正規拡大であることを示せ。 [5 点]
- $K \subset M \subset L$ を体の列とする。 L/K が分離拡大であるならば L/M と M/K も分離拡大であることを示せ。 [5 点]
- 体の代数的単純拡大 $K(\alpha)/K$ について $[K(\alpha) : K]_s \geq |\text{Aut}(K(\alpha)/K)|$ であることを示せ。ただし $[K(\alpha) : K]_s$ は $K(\alpha)/K$ の分離次数である。 [5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]