体論・筆答レポート (第二回 2022/01/20) 解答例

1. $K = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})$ である。(ω は 1 の原始 3 乗根。)

   (1) $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid i = 1, 2, \ldots, 6\}$ である。ただし σ_i は

$$\begin{aligned}
\omega^{\sigma_1} &= \omega, & \sqrt[3]{2}^{\sigma_1} &= \sqrt[3]{2} \\
\omega^{\sigma_2} &= \omega, & \sqrt[3]{2}^{\sigma_2} &= \omega\sqrt[3]{2} \\
\omega^{\sigma_3} &= \omega, & \sqrt[3]{2}^{\sigma_3} &= \omega^2\sqrt[3]{2} \\
\omega^{\sigma_4} &= \omega^2, & \sqrt[3]{2}^{\sigma_4} &= \sqrt[3]{2} \\
\omega^{\sigma_5} &= \omega^2, & \sqrt[3]{2}^{\sigma_5} &= \omega\sqrt[3]{2} \\
\omega^{\sigma_6} &= \omega^2, & \sqrt[3]{2}^{\sigma_6} &= \omega^2\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

   で定まる自己同型である。G の部分群は G, $\langle\sigma_2\rangle = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\langle\sigma_4\rangle = \{\sigma_1, \sigma_4\}$, $\langle\sigma_5\rangle = \{\sigma_1, \sigma_5\}$, $\langle\sigma_6\rangle = \{\sigma_1, \sigma_6\}$, $1 = \{\sigma_1\}$ の 6 個である。

   (2) $K^G = \mathbb{Q}$, $K^{\langle\sigma_2\rangle} = \mathbb{Q}(\omega)$, $K^{\langle\sigma_4\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $K^{\langle\sigma_5\rangle} = \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2})$, $K^{\langle\sigma_6\rangle} = \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$, $K^1 = K$

2. (1) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$ であり、その対応 $\Phi : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ は $\zeta^{\Phi(\bar{i})} = \zeta^i$ で定まる。したがって $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid i \in \{1, 5, 7, 11\}\}$ である。ただし σ_i は $\zeta^{\sigma_i} = \zeta^i$ で定まる自己同型である。

   $G \cong C_2 \times C_2$ であるから G の部分群は G, $\langle\sigma_5\rangle = \{\sigma_1, \sigma_5\}$, $\langle\sigma_7\rangle = \{\sigma_1, \sigma_7\}$, $\langle\sigma_{11}\rangle = \{\sigma_1, \sigma_{11}\}$, $1 = \{\sigma_1\}$ の 5 個である。

   (2) $\mathbb{Q}(\zeta)^G = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma_5\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^5)$, $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma_7\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta^8)$, $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma_{11}\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{11})$, $\mathbb{Q}(\zeta)^1 = \mathbb{Q}(\zeta)$

   (3) 2 次体は $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma_5\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma_7\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma_{11}\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

3. (1) $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{3^6}/\mathbb{F}_3) = \langle\sigma\rangle \cong C_6$ である。ただし σ は $\alpha^\sigma = \alpha^3$ ($\forall\alpha \in \mathbb{F}_{3^6}$) なる写像である。

   (2) $\mathbb{F}_{3^6}$, $\mathbb{F}_{3^3}$, $\mathbb{F}_{3^2}$, $\mathbb{F}_3$

4. $\Phi_{16}(x) = x^8 + 1$

5. (1) $f(\alpha) = f(\beta)$ とする。$0 = \alpha^p - \beta^p = (\alpha - \beta)^p$ であり、K は体なので $\alpha - \beta = 0$、すなわち $\alpha = \beta$ となる。f は単射である。

   (2) $K = \mathbb{F}_p(x)$ (有理関数体) とする。このとき次数を考えれば $\alpha^p = x$ となる $\alpha \in K$ は存在しないので f は全射ではない。

6. $\sigma \in G$ とする。$\iota : L \to \overline{K}$ と $\mu : M \to L$ をそれぞれ埋め込みとして K-同型 $\mu\sigma\iota : M \to \overline{K}$ を定める。$m \in M$ に対しては $m^{\mu\sigma\iota} = m^\sigma$ である。M/K がガロア拡大なので $M^\sigma = M^{\mu\sigma\iota} = M$ である。

   $\sigma \in G$, $\tau \in G^M$ とする。$m \in M$ に対して、$m^\sigma \in M^\sigma = M$ であることに注意して $m^{\sigma\tau\sigma^{-1}} = (m^\sigma)^{\tau\sigma^{-1}} = (m^\sigma)^{\sigma^{-1}} = m$ である。よって $\sigma\tau\sigma^{-1} \in G^M$ となり $G^M \lhd G$ である。

7. $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ とおく。$\sigma' : L \to \mathbb{C}$ を $z^{\sigma'} = \overline{z}$ (複素共役) で定めれば、これは中への $\mathbb{Q}$-自己同型である。L は $\mathbb{R}$ に含まれないから σ は恒等写像ではない。$L/\mathbb{Q}$ がガロア拡大であるから $L^{\sigma'} = L$ が成り立ち、値域を制限して $\sigma : L \to L$ が定義される。$\sigma \in G$ である。$\sigma^2 = 1$ なので $\langle\sigma\rangle = \{1, \sigma\}$ は位数 2 の G の部分群となる。$M = L^{\langle\sigma\rangle}$ とおけばガロア理論の基本定理から $[L : M] = 2$ である。また σ 不変であるということは $\mathbb{R}$ に含まれるということなので $M \subset \mathbb{R}$ となる。