

群論演習 (第一回 2010/10/07)

1. 集合 A の二項演算を $f: A \times A \rightarrow A$ とする。この演算に関する結合法則を f を用いて表せ。同様に単位元の性質を f を用いて表せ。
2. 群 G の元 a, b, a_i に対して、次のことを示せ。
 - (1) $(a^{-1})^{-1} = a$ である。
 - (2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ である。より一般に $(a_1 \cdots a_\ell)^{-1} = a_\ell^{-1} \cdots a_1^{-1}$ である。
3. H, K が群 G の部分群ならば、 $H \cap K$ も G の部分群であることを示せ。
4. 群 G の中心 $Z(G)$ は G の部分群であることを示せ。
5. 群 G の二つの部分群 H, K について、 HK が G の部分群になることと $HK = KH$ が成り立つことは同値であることを示せ。
6. H が群 G の部分群であるならば $H = H^{-1}$ であることを示せ。
7. \mathbb{Z} を加法群と見る。
 - (1) $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ は \mathbb{Z} の部分群であることを示せ。
 - (2) \mathbb{Z} の部分群 $n\mathbb{Z}$ による剰余類分解とその完全代表系を求めよ。
8. G を群、 H をその部分群とする。 $a, b \in G$ に対して、 $ab^{-1} \in H$ となるときに $a \sim_r b$ として、 G 上の関係 \sim_r を定める。このとき \sim_r は同値関係であることを示せ。
9. G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f: G \rightarrow G$ を $f(g) = ag$ で定めれば、 f は全単射であることを示せ。
10. 複素数を成分とする n 次正則行列全体の集合 $GL_n(\mathbb{C})$ は行列の乗法を演算として群となることを示せ。

群論演習 (第二回 2010/10/14)

1. G をアーベル群とする。自然数 n を固定する。

$$H = \{g \in G \mid g^n = 1\}, \quad K = \{g^n \mid g \in G\}$$

とする。このとき H, K は G の部分群になることを示せ。

2. 3 次対称群 $G = S_3$ を考える。

- (1) G の元をすべて書け。
- (2) $H = \{g \in G \mid g^3 = 1\}$ を求め、 H は G の正規部分群になることを示せ。
- (3) $K = \{g \in G \mid g^2 = 1\}$ を求め、 K は G の部分群ではないことを示せ。

3. G を有限群とし、 $g \in G$ とする。元 g の位数 $o(g)$ は群 G の位数 $|G|$ の約数であることを示せ。

4. G を有限群とし、位数 $|G|$ は素数であるとする。このとき G の部分群は自明なもの、すなわち 1 と G 、に限ることを示せ。

5. G を群、 H を G の部分群とする。

- (1) $g \in G$ に対して、 $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ も G の部分群であることを示せ。
- (2) $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ とおく。このとき $N_G(H)$ は G の部分群であることを示せ。 $(N_G(H)$ を H の G における正規化群 (normalizer) という。)
- (3) $x, y \in G$ に対して

$$xHx^{-1} = yHy^{-1} \iff xN_G(H) = yN_G(H)$$

を示せ。

- (4) $x \in G$ に対して $N_G(xHx^{-1}) = xN_G(H)x^{-1}$ であることを示せ。

6. 群 G の任意の元 x に対して $x^2 = 1$ が成り立つならば G はアーベル群であることを示せ。

群論演習 (第三回 2010/10/21、修正版)

1. H が G の部分群で N が G の正規部分群ならば HN は G の部分群であることを示せ。また H, K が群 G の正規部分群ならば、 HK も G の正規部分群であることを示せ。
2. H が G の部分群で N が G の正規部分群ならば $H \cap N$ は H の正規部分群であることを示せ。
3. G を位数 n の有限巡回群とすると、 $d \mid n$ に対して $\#\{x \in G \mid x^d = 1\} = d$ であることを示せ。
4. $N \trianglelefteq G$ とし $g \in G$ とする。このとき剰余群 G/N における gN の位数 $o(gN)$ は $o(g)$ の約数であることを示せ。ただし g と gN の位数はそれぞれ有限であるものとする。
5. n 次直交群 $O(n)$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群になることを示せ。ただし $O(n) = \{T \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t T T = T {}^t T = E \text{ (単位行列)}\}$ である。
6. $GL_2(2)$ の元をすべて書け。ただし $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ と表すことにする。
7. $GL_n(q)$ の位数を求めよ。
8. 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ を共通の数字を含まないいくつかの巡回置換の積に分解し、その型を求めよ。また、この置換の位数を求めよ。
9. 巡回置換 $(1\ 2\ \cdots\ \ell) = (1\ \ell)(1\ \ell - 1)\cdots(1\ 3)(1\ 2)$ を示せ。
10. 任意の n 次の置換はいくつかの互換の積として表すことができることを示せ。
11. $\sigma = (1\ 5)(2\ 4\ 3)$, $\tau = (1\ 2\ 3)$ とし、 $\tau\sigma\tau^{-1}$ を計算せよ。
12. 5 次対称群 S_5 は長さ 3 のサイクルをいくつもつか答えよ。
13. 置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$ の符号をそれぞれ求めよ。
14. A_4 の元をすべて書け。

群論演習 (第四回 2010/10/28)

1. \mathbb{Z} を加法群と見る。 $a \in \mathbb{Z}$ を一つ固定する。このとき $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $f(x) = ax$ で定めれば、これは準同型であることを示せ。
2. G を群とし $g \in G$ を一つ固定する。このとき $f: G \rightarrow G$ を $f(x) = g^{-1}xg$ で定めれば、これは準同型であることを示せ。
3. G をアーベル群とする。 $f: G \rightarrow G$ を $f(x) = x^2$ で定めれば、これは準同型であることを示せ。また、 G がアーベル群でないならば、 f は準同型にならないことを示せ。
4. n -次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n を加法群と見る。 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(a, b) = (b, 0)$ で定める。
 - (1) f は準同型であることを示せ。
 - (2) f の核と像を求めよ。
5. 群 G と単準同型 $f: G \rightarrow G$ で同型でないものを具体的に一つ構成せよ。
6. 群 G と全準同型 $f: G \rightarrow G$ で同型でないものを具体的に一つ構成せよ。
7. $f: G \rightarrow H$ を群準同型とし $A \leq H$ とする。このとき $f^{-1}(A) \leq G$ であることを示せ。また $A \trianglelefteq H$ ならば $f^{-1}(A) \trianglelefteq G$ であることを示せ。
8. $f: G \rightarrow H$ を群準同型とし $B \trianglelefteq G$ としても、 $f(B) \trianglelefteq H$ とは限らない。このような例を具体的に構成せよ。
9. G を群とする。 $a, b \in G$ に対して $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ とおいて、これを a と b の交換子 (commutator) という。 G のすべての交換子で生成される部分群を G の交換子群 (derived subgroup) といい $D(G)$ と書く。
 - (1) $[a, b] = 1$ であることと a と b が可換であることは同値であることを示せ。
 - (2) $D(G)$ は G の正規部分群であることを示せ。
 - (3) $G/D(G)$ はアーベル群であることを示せ。
 - (4) $N \trianglelefteq G$ とする。 G/N がアーベル群ならば $D(G) \subset N$ であることを示せ。

群論演習 (第五回 2010/11/04)

- $f: G \rightarrow H$ を群準同型とする。
 - $\text{Im} f$ は H の部分群であることを示せ。
 - $\text{Ker} f$ は G の正規部分群であることを示せ。
 - $N \trianglelefteq G$ が $N \subset \text{Ker} f$ をみたすとする。このとき写像 $\bar{f}: G/N \rightarrow H$, $\bar{f}(gN) = f(g)$ が矛盾なく定義できることを示せ。
 - (3) で定義された \bar{f} の核を求めよ。
- \mathbb{Z} などを加法群と見る。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元は $\bar{a} = a + n\mathbb{Z}$ のように略記する。異なる n に対しても同じ記号を用いるので注意すること。
 - 準同型 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 4x$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。
 - 準同型 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $f(x) = 6\bar{x}$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。
 - 準同型 $f: \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $f(\bar{x}) = 6\bar{x}$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。
 - 準同型 $f: \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $f(\bar{x}) = 3\bar{x}$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ を $f(\theta) = e^{i\theta}$ で定める。ただし i は虚数単位である。
 - f は加法群 \mathbb{R} から乗法群 \mathbb{C}^\times への準同型であることを示せ。
 - f の像と核を求めよ。
 - f に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。
- $N \trianglelefteq G$ とし $f: G \rightarrow G/N$ を自然な全準同型とする。
 - G/N の部分群 B に対して $f(f^{-1}(B)) = B$ を示せ。
 - G の部分群 A が N を含むならば $f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。
 - \mathcal{A} を G の部分群で N を含むもの全体の集合、 \mathcal{B} を G/N の部分群全体の集合とする。このとき \mathcal{A} と \mathcal{B} の間には全単射が存在することを示せ。

群論演習 (第六回 2010/11/11)

- $f: G \rightarrow H$ を準同型とする。
 - $A \leq G$ に対して、 $f(A) \leq H$ を示せ。
 - $B \leq H$ に対して、 $f^{-1}(B) \leq G$ を示せ。
 - $N = \text{Ker} f$ とする。 $A \leq G$ に対して $f^{-1}(f(A)) = NA$ を示せ。
- G, H を有限群とし $f: G \rightarrow H$ を準同型とする。 $g \in G$ に対して $o(f(g)) \mid o(g)$ であることを示せ。特に f が同型ならば $o(f(g)) = o(g)$ であることを示せ。ただし $o(g)$ は群の元 g の位数を表すものとする。
- C_m, C_n をそれぞれ位数 m, n の有限巡回群とする。 C_m から C_n への準同型の個数を求めよ。
- $G = S_n$ (n 次対称群) とし、 $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ とおく。
 - H は G の部分群であることを示せ。
 - $n \geq 3$ ならば H は G の正規部分群ではないことを示せ。
- G を群、 $Z(G)$ を G の中心とする $G/Z(G)$ が巡回群であるならば G はアーベル群であることを示せ。(したがって、このとき $G = Z(G)$ となる。)
- G を群とする。 $g, h \in G$ に対して $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ において、これを g と h の交換子という。
 - $A \trianglelefteq G, B \trianglelefteq G$ とするとき、 $a \in A, b \in B$ に対して $[a, b] \in A \cap B$ であることを示せ。
 - $A \trianglelefteq G, B \trianglelefteq G, A \cap B = 1$ とするとき、 A の元と B の元は可換になることを示せ。
- 群 G は集合 X に左から作用するものとする。 $x, y \in X$ に対して $y = gx$ となる $g \in G$ が存在するとき $x \sim y$ として、 X 上の関係 \sim を定める。このとき \sim は同値関係であることを示せ。

群論演習 (第七回 2010/11/25)

- 群 G は集合 X に左から作用するものとする。
 - (再掲：第六回問 7) $x, y \in X$ に対して $y = gx$ となる $g \in G$ が存在するとき $x \sim y$ として、 X 上の関係 \sim を定める。このとき \sim は同値関係であることを示せ。
 - $x \in X$ に対して、その安定化部分群を $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ とする。 G_x は G の部分群であることを示せ。
 - $x \in X, g, h \in G$ に対して $gx = hx$ であることと $gG_x = hG_x$ であることは同値であることを示せ。
 - (1) の同値関係について、 $x \in X$ を含む同値類を Gx と表す。すなわち $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ である。 $|Gx| < \infty$ ならば $|Gx| = |G : G_x|$ であることを示せ。
- 群 G は集合 X に、 $(g, x) \mapsto gx$ で、左から作用するものとする。 $x \in X$ と $g \in G$ に対して $x^g = g^{-1}x$ で x^g を定めると、これは G の X への右からの作用となることを示せ。
- 5 次対称群 S_5 の部分群 $G = \langle (1\ 2)(3\ 4\ 5), (3\ 4) \rangle$ を考える。 G は自然に $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に作用する。
 - G の元をすべて書け。
 - G による X の軌道をすべて求めよ。
 - $x = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して、その安定化部分群 G_x を求めよ。
- G を 3 次対称群 S_3 とする。 G の G 自身への左からの作用を ${}^g x = gxg^{-1}$ で定める。
 - これが作用となることを確認せよ。
 - G による軌道をすべて求めよ。
 - $x = (1\ 2\ 3)$ に対して、安定化部分群 G_x を求めよ。
- n を自然数とする。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を乗法に関するモノイドと見て、その単数群を G とする。
 - $g \in G$ と $a + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して、 $g(a + n\mathbb{Z})$ を $ga + n\mathbb{Z}$ で定めれば、これは G の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ への作用となることを示せ。
 - $n = 5, 6, 8$ に対して (1) の作用を考え、その軌道を求めよ。

群論演習 (第八回 2010/12/02)

1. 二面体群 $G = D_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1, yx = x^3y \rangle$ とその部分群 $H = \langle y \rangle$ を考える。
 - (1) G の H による左剰余類分解を求めよ。
 - (2) G の左剰余類全体の集合 G/H への左からの自然な作用を考え、 xH の安定化部分群を求めよ。
 - (3) $N_G(H)$ を求めよ。
 - (4) $C_G(x)$ を求めよ。
 - (5) G の共役類を求め、類等式を書け。
2. 4 次交代群 A_4 を考える。
 - (1) A_4 の元をすべて書け。(位数は 12 である。)
 - (2) A_4 の共役類を求め、類等式を書け。
 - (3) A_4 に位数 6 の部分群が存在するならばそれは正規部分群であることを示せ
 - (4) A_4 に位数 6 の部分群はないことを示せ。
3. p を素数とするととき、位数 p^2 の群はアーベル群であることを以下の方針で示せ。
 - (1) 一般に、群 G について、 $G/Z(G)$ が巡回群であるならば G は巡回群であることを示せ。
 - (2) 位数 p^2 の群の類等式の可能性をすべて書け。
 - (3) 位数 p^2 の群はアーベル群であることを示せ。
4. G を有限群とする。 $x \in G$ に対して、 x を含む共役類に含まれる元の数 $|{}^Gx|$ は $|G|$ の約数であることを示せ。また $|G| \neq 1$ ならば $|{}^Gx| \neq |G|$ であることを示せ。
5. 立方体を自分自身へと移すような頂点の置換全体のなす群の位数を求めよ。また正 20 面体で同様に定義される群の位数を求めよ。(正 20 面体は一つの頂点に 5 つの正三角形が集まってできている。)

群論演習 (第九回 2010/12/09)

1. G を位数 120 の群とする。
 - (1) $p = 2, 3, 5$ について G のシロー p -部分群の位数を答えよ。
 - (2) $p = 2, 3, 5$ について G のシロー p -部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
2. G を位数 15 の群とする。
 - (1) $p = 3, 5$ について G のシロー p -部分群の位数を答えよ。
 - (2) $p = 3, 5$ について G のシロー p -部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
 - (3) G は巡回群であることを示せ。
3. p を素数とし、 G を有限群とする。 G の正規 p -部分群 Q は G の任意のシロー p -部分群に含まれることを示せ。
4. G を有限群とし H を G の正規部分群とする。 p を素数とし $P \in \text{Syl}_p(H)$ とする。このとき $G = HN_G(P)$ となることを示せ。
5. 次の群を考える。

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = 1, yx = xy, zx = yz, zy = xyz \rangle$$

- (1) G の任意の元は $x^i y^j z^k$ の形に書くことが出来ることを確認し、 G の元をすべて書け。
- (2) G の元の位数をすべて求めよ。
- (3) 位数が 2-べきである元の個数を求めよ。
- (4) G のシロー 2 部分群は正規部分群であることを示せ。
- (5) G のシロー 3 部分群の個数を求めよ
- (6) G の共役類をすべて求め、類等式を書け。

群論演習 (第十回 2010/12/16)

1. G を位数 100 の群とする。
 - (1) $p = 2, 5$ について G のシロー p -部分群の位数を答えよ。
 - (2) $p = 2, 5$ について G のシロー p -部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
2. [第八回問 2 再掲] 4 次交代群 A_4 を考える。
 - (1) A_4 の元をすべて書け。(位数は 12 である。)
 - (2) A_4 の共役類を求め、類等式を書け。
 - (3) A_4 に位数 6 の部分群が存在するならばそれは正規部分群であることを示せ
 - (4) A_4 に位数 6 の部分群はないことを示せ。
3. [第八回問 3 再掲] p を素数とすると、位数 p^2 の群はアーベル群であることを以下の方針で示せ。
 - (1) 一般に、群 G について、 $G/Z(G)$ が巡回群であるならば G は巡回群であることを示せ。
 - (2) 位数 p^2 の群の類等式の可能性をすべて書け。
 - (3) 位数 p^2 の群はアーベル群であることを示せ。
4. G を n 次置換群とする。任意の $a_i, b_i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \neq b_i$ ($i = 1, 2$) に対して、ある $g \in G$ が存在して $g(a_1) = a_2, g(b_1) = b_2$ となるとき、 G は 2 重可移であるという。(同様に t 重可移置換群も定義される。)
 G を n 次可移置換群とし安定化部分群 $G_1 = \{\sigma \in G \mid \sigma(1) = 1\}$ を考える。 G_1 は自然に $\{2, 3, \dots, n\}$ に作用する。 G が 2 重可移であることと G_1 の $\{2, 3, \dots, n\}$ への作用が可移であることは同値であることを示せ。

群論演習 (第十一回 2011/01/06、修正版)

- G を位数 36 の群とする。
 - $p = 2, 3$ について G のシロー p -部分群の位数を答えよ。
 - $p = 2, 3$ について G のシロー p -部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
- G を位数 21 の群とする。
 - G のシロー 7-部分群は G の正規部分群であることを示せ。
 - G の位数 7 の元の個数を求めよ。
- $G = \langle x \mid x^6 = 1 \rangle = \{1 = x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ について、次の問いに答えよ。
 - G のシロー 2-部分群 P とシロー 3-部分群 Q を求めよ。
 - $G = P \times Q$ であることを示せ。
- H, K を有限群とし $G = H \times K$ とする。 G の元は (h, k) 、ただし $h \in H, k \in K$ と書くことができる。 (h, k) の位数は h の位数と k の位数の最小公倍数になることを示せ。
- $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G, H \cap K = 1$ とする。このとき H の任意の元と K の任意の元は可換になることを、交換子 $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ ($h \in H, k \in K$) を考えることによって示せ。
- p, q を相異なる素数とする。 $|G| = p^a q^b$ であり、 G のシロー p -部分群 P とシロー q -部分群 Q は共に G の正規部分群であるとする。このとき $G = P \times Q$ であることを示せ。
- $C_6 \times C_4 \cong C_{12} \times C_2$ であることを示せ。ただし C_n は位数 n の有限巡回群を表すものとする。
- C_4 と $C_2 \times C_2$ は同型ではないことを示せ。

群論演習 (第十二回 2011/01/13)

1. $G = \langle x \mid x^{10} = 1 \rangle$ とする。 G のシロー 2-部分群とシロー 5-部分群を求めよ。また G のシロー 3-部分群は何かを答えよ。
2. 位数 10 の二面体群

$$G = D_{10} = \langle x, y \mid x^5 = y^2 = 1, yx = x^4y \rangle$$

を考える。

- (1) $p = 2, 5$ について G のシロー p -部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
 - (2) $p = 2, 5$ について G のシロー p -部分群の個数を求めよ。
 - (3) G には位数 1, 2, 5, 10 の元がいくつあるか、それぞれ答えよ。
 - (4) G の共役類を求めよ。
3. C_n で位数 n の有限巡回群を表すものとする。
 - (1) $C_2 \times C_2$ の部分群をすべて求めよ。
 - (2) 素数 p について $C_p \times C_p$ の部分群の個数を求めよ。
 4. G を群とし、 $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G$ とする。 $H \cap K = 1$ ならば $HK = H \times K$ であることを示せ。
 5. $C_{12} \times C_{18}$ の位数最大の元の位数を求めよ。
 6. 位数 4, 6, 8, 10, 12, 16 の有限アーベル群をそれぞれ分類せよ。
 7. G を位数が有限とは限らないアーベル群とする。

$$T(G) = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$$

とおくと、これは G の部分群であることを示せ。($o(g) < \infty$ なる g を G のトーション元といい、 $T(G)$ を G のトーション部分群という。)

群論演習 (第十三回 2011/01/20)

1. 群 G が集合 X に左から作用することの定義を答えよ。
2. 加法群 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ を考える。
 - (1) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の自己同型群 $G = \text{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ を求めよ。
 - (2) G は $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ に自然に作用する。この作用による軌道をすべて求めよ。
3. G を位数 80 の群とする。
 - (1) $p = 2, 5$ について G のシロー p -部分群の位数を答えよ。
 - (2) $p = 2, 5$ について G のシロー p -部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
4. H を有限群 G の正規部分群とする。 p を素数とし $P \in \text{Syl}_p(G)$ とする。 $P \subset H$ ならば、任意の $Q \in \text{Syl}_p(G)$ について $Q \subset H$ となることを示せ。
5. 位数 24, 72 の有限アーベル群をそれぞれ分類せよ。
6. G, H を有限群とし、 $|G|$ と $|H|$ は互いに素であるものとする。 K を直積 $G \times H$ の部分群とする。このとき $K = (K \cap G) \times (K \cap H)$ となることを示せ。ただし G, H は自然な方法で $G \times H$ の部分群であると考えてよいとする。
7. 問 6 で、 $|G|$ と $|H|$ が互いに素でないならば、 $K = (K \cap G) \times (K \cap H)$ は一般に成り立たない。このような例を作れ。