群論・中間試験 (2010/11/18)

1. G を群とし $g \in G$ とする。写像 $f : G \to G$ を $f(x) = gxg^{-1}$ で定めれば、これは群準同型であることを示せ。[5 点]

2. G, H を群とし、$f : G \to H$ を群準同型とする。[5 点 $\times$ 4]

   (1) $\mathrm{Im} f$ は H の部分群であることを示せ。

   (2) $\mathrm{Ker} f$ は G の正規部分群であることを示せ。

   (3) $\overline{f} : G/\mathrm{Ker} f \to H$, $\overline{f}(g \cdot \mathrm{Ker} f) = f(g)$ が矛盾なく定義されることを示せ。

   (4) f が単射であることと $\mathrm{Ker} f = 1$ であることは同値であることを示せ。

3. G を群、H を G の部分群とする。$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$ とするとき、$N_G(H)$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]

4. G を群、H を G の部分群、N を G の正規部分群とする。このとき

$$NH/N \cong H/(H \cap N)$$

   であることを証明せよ。(NH が G の部分群になること、および準同型定理は証明なしに使ってよい。) [5 点]

5. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ を考える。[5 点 $\times$ 2]

   (1) σ を共通の数字を含まない巡回置換の積として表せ。

   (2) σ の (対称群の元としての) 位数を求めよ。また σ が偶置換か、奇置換かをその理由も含めて答えよ。

6. $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{Z}$) を加法群と見る。[5 点 $\times$ 3]

   (1) $a \in \mathbb{Z}$ に対して、写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax$ は群準同型であることを示せ。

   (2) $g : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $g(\overline{x}) = 6\overline{x}$ は群準同型である。g の核と像を求めよ。

   (3) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の自己同型群の位数 (自己同型の個数) を求めよ。

[5 点 $\times$ 12 $=$ 60 点満点]