群論・期末試験 (2011/01/27, 訂正版)

1. $f : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を $f(a + 8\mathbb{Z}) = 3a + 12\mathbb{Z}$ で定めると、これは加法群の準同型となる。f の像と核を求めよ。[5 点]

2. $f : G \to H$ を群準同型とする。N を G の正規部分群とし、$N \leq \operatorname{Ker} f$ とする。[5 点 × 2]

   (1) $\overline{f} : G/N \to H$ $(gN \mapsto f(g))$ が矛盾なく定義されることを示せ。

   (2) (1) の $\overline{f}$ は群準同型であることを示せ。

3. G をアーベル群とし n を自然数とする。$H = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ とおくと H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

4. 群 G は集合 X に左から作用するものとする。$x \in X$ に対して、x の安定化部分群を $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ とおく。$g, h \in G$ とする。[5 点 × 2]

   (1) $gx = hx$ ならば $gG_x = hG_x$ であることを示せ。

   (2) $gG_x = hG_x$ ならば $gx = hx$ であることを示せ。

5. 5 次対称群 S_5 の部分群 $G = \langle (1\ 2), (3\ 4\ 5) \rangle$ を考える。G は自然に集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に左から作用するものとする。[5 点 × 2]

   (1) X の G による軌道をすべて求めよ。

   (2) $1 \in X$ の安定化部分群 G_1 を求めよ。

6. G を位数 30 の群とする。$p = 2, 3, 5$ それぞれについて、G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で求めよ。[5 点]

7. G, H を有限群とし、直積 $G \times H$ を考える。元 $(g, h) \in G \times H$ の位数は、g の位数と h の位数の最小公倍数となることを示せ。[5 点]

8. m, n を互いに素な自然数とし、G を位数が mn の群とする。H, K を G の正規部分群とし、$|H| = m$, $|K| = n$ とする。このとき H の任意の元と K の任意の元とは可換になることを示せ。[5 点]

9. 位数 72 のアーベル群を分類せよ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]