群論・筆答レポート問題 (第一回 2011/12/01)

1. G を群、H, K を G の部分群とする。$H \cap K$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]
2. a を群 G の有限位数 n の元とする。自然数 i に対して a^i の位数を答えよ。[5 点]
3. G, H, K を群とし $f : G \to H$, $g : H \to K$ を群準同型とする。このとき合成写像 $g \circ f : G \to K$ も群準同型であることを示せ。[5 点]
4. G, H を群とする。群準同型 $f : G \to H$ に対して、その核 $\mathrm{Ker} f$ は G の正規部分群であることを示せ。[5 点]
5. G, H を群とし、$f : G \to H$ を群準同型とする。$\mathrm{Ker} f = \{1\}$ ならば f は単射であることを示せ。[5 点]
6. 自然数 n に対して $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考え、これを加法群と見る。
   (1) $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $f(x + m\mathbb{Z}) = x + n\mathbb{Z}$ で定めることができるための、m, n に関する条件を答えよ。[5 点]
   (2) $f : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を $f(x + 8\mathbb{Z}) = 9x + 12\mathbb{Z}$ で定める。このとき f の核と像を求めよ。[5 点]
7. 7 次の置換
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   について、以下の問に答えよ。
   (1) σ を共通の数字を含まない巡回置換の積に表わせ。[4 点]
   (2) σ の位数を答えよ。[3 点]
   (3) σ は偶置換か奇置換かを答えよ。ただしその理由も書くこと。[3 点]
8. 複素数体上の一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ を考え、行列式を対応させる写像 $\det : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ を考えれば、これは群準同型である。
   (1) $\det$ の核と像を求めよ。ただし、記述の仕方は、意味が明確であればどのような形でも構わない。 [5 点]
   (2) $\det$ に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。[5 点]
9. G を群とする。G の内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(G)$ は自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群であることを示せ。[5 点]

[60 点満点]