

群論・筆答レポート問題 (第二回 2012/01/26, 訂正版)

1. G をアーベル群とし、自然数 n を一つ固定する。写像 $f: G \rightarrow G$ を $f(g) = g^n$ で定めると、これは準同型となることを示せ。また f の核と像を書け。(核と像の書き方は抽象的で構わないが f を用いないで書くこと。)[5 点]
2. G を群とし H を G の部分群、 N を G の正規部分群とする。準同型定理を用いて、同型定理

$$HN/N \cong H/(H \cap N)$$

を証明せよ。[5 点]

3. 群 G は集合 X に左から作用するものとする。
 - (1) $x, y \in X$ に対して $y = gx$ となる $g \in G$ が存在するとき $x \sim y$ と定めると、 \sim は G 上の同値関係となることを示せ。[5 点]
 - (2) $x \in X$ に対して $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ とおくと、 G_x は G の部分群になることを示せ。[5 点]
 - (3) $x \in X$ に対して $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ とおく。このとき $f: G/G_x \rightarrow Gx$, $f(gG_x) = gx$ は矛盾なく定義されることを示せ。[5 点]
 - (4) (3) の f は全単射となることを示せ。[5 点]
4. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を乗法に関するモノイドと見る。
 - (1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の単数群 $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ を具体的にすべての要素を書くことによって答えよ。[5 点]
 - (2) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ は左からかけることによって自然に $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ に作用する。このときの軌道をすべて求めよ。[5 点]
5. 位数 56 の群 G を考える。
 - (1) $p = 2, 7$ それぞれについて、 G のシロー p -部分群の位数を答えよ。[5 点]
 - (2) $p = 2, 7$ それぞれについて、 G のシロー p -部分群の個数の可能性を、シローの定理から分かる範囲で答えよ。[5 点]
6. 位数 77 の巡回群は位数 77 の元をいくつもつかを答えよ。ただし、答えだけでなくその理由も書くこと。[5 点]
7. 位数 200 のアーベル群の分類を書け。[5 点]

[60 点満点]