

群論・筆答レポート問題 (第二回 2013/01/22)

1. $f: G \rightarrow H$ を群の準同型とする。 $A \leq H$ ならば $f^{-1}(A) \leq G$ であることを示せ。 [5 点]
2. $f: G \rightarrow H$ を群の全準同型とする。 $N \trianglelefteq G$ ならば $f(N) \trianglelefteq H$ であることを示せ。 [5 点]
3. $f: \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ を $f(a + 24\mathbb{Z}) = 6a + 16\mathbb{Z}$ で定める。 [5 点 \times 2]
 - (1) f が矛盾なく定義されること、および加法群としての準同型となることを示せ。
 - (2) f の核と像を求めよ。
4. $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$ を 4 次対称群 S_4 の部分群とし、 G の $X = \{1, 2, 3, 4\}$ への左からの自然な作用を考える。このとき $1 \in X$ の安定化部分群 G_1 を求めよ。 [5 点]
5. G を位数 12 の群とする。 [5 点 \times 3]
 - (1) G のシロー 2-部分群の位数を答えよ。またシロー 2-部分群の個数の可能性をシローの定理から分かる範囲で答えよ。
 - (2) G のシロー 3-部分群の位数を答えよ。またシロー 3-部分群の個数の可能性をシローの定理から分かる範囲で答えよ。
 - (3) $P \in \text{Syl}_2(G)$, $Q \in \text{Syl}_3(G)$ とするとき、 $P \trianglelefteq G$ または $Q \trianglelefteq G$ となることを示せ。
6. 以下の位数のアーベル群をそれぞれ分類せよ。 [5 点 \times 2]
 - (1) 16
 - (2) 225
7. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の単数群 $U(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ は乗法に関してアーベル群である。 $U(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ の元を列挙し、そのアーベル群としての構造を決定せよ。 [5 点]
8. G を有限群とし $|G| = mn$, m と n は互いに素であるとする。 $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, $|H| = m$, $|K| = n$ とするとき、 $G = H \times K$ であることを示せ。 [5 点]

[60 点満点]