

代数入門期末試験 (2005/8/1)

- 以下の条件は「 $a, b, x \in A$ に対して $ax = bx$ ならば $a = b$ である」という命題が成り立つための仮定として適当であるかどうかを○×で答えよ。[各 2 点]
 - A は半群である
 - A はモノイドである
 - A は群である
 - A は環で $x \neq 0$ である
 - A は可換環で $x \neq 0$ である
 - A は整域で $x \neq 0$ である
 - A は体で $x \neq 0$ である
 - A は環、 a, b は正則元、 $x \neq 0$ である
 - A は環で x は正則元である
 - A は斜体である
- $M(2, \mathbb{R})$ は実数体 \mathbb{R} 上の 2 次の正方行列全体のなす集合とし、通常の加法と乗法を考える。[各 5 点]
 - 乗法の結合法則が成り立つことを示せ。
 - 分配法則が成り立つことを示せ。
- R を環とし $a \in R$ を固定する。写像 $f: R \rightarrow R$ を $f(x) = xa$ で定める。このとき次を示せ。[各 5 点]
 - $f^{-1}(0) = \{0\}$ と f が単射であることは同値である。
 - $1 \in f(R)$ と f が全射であることは同値である。
- R を環とする。 $a, b \in R$ に対して R の正則元 u が存在して $b = au$ となるとき $a \sim b$ と書くことにする。 \sim という関係は R 上の同値関係であることを示せ。[5 点]
- $n \in \mathbb{N}$ とし $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考える。 n が合成数であるとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は体ではないことを示せ。 $(n$ が合成数であるとは n が 1 と n 以外の約数を持つことである。)
[5 点]
- $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を考える。[各 5 点]
 - $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の零因子をすべて答えよ。
 - $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の正則元をすべて答えよ。