# 代数入門 (期末試験 2007/7/30)

1. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$ を複素数を成分とする $n$ 次正方行列とする。[各 5 点]

   (1) $ABC$ の $(i, j)$-成分を $A, B, C$ の成分を用いて表せ。

   (2) 正方行列の対角成分すべての和を、その行列の**トレース**という。$AB$ のトレースと $BA$ のトレースが等しいことを示せ。

2. 環 $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を考える。[各 5 点]

   (1) $R$ の正則元をすべて答えよ。

   (2) $R$ の零因子をすべて答えよ。(零元は零因子とは言わないこととする。)

3. $R$ を単位元をもつ環とし $a \in R$ を正則元 (単数) とする。$f : R \to R$ を $f(r) = ar$ で定める。このとき $f$ は全射であることを示せ。[5 点]

4. $R$ を環、$I$ をそのイデアルとする。剰余環における積 $(a + I)(b + I) = ab + I$ が矛盾なく定義されることを示せ。[5 点]

5. $R$ を可換環とし $R[x]$ を $R$ 上の一変数多項式環とする。$f(x) \in R[x]$ に対して $\deg f(x)$ でその次数を表すことにする。[各 5 点]

   (1) $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$ は正しくない。このような例を具体的に一つ答えよ。

   (2) どの様な仮定の下で $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$ は正しいか。もっとも適当と思われる条件を答えよ。

6. $29x + 42y = 1$ となる整数の組 $(x, y)$ を一組求めよ。[5 点]

7. 整域が集合として有限集合であるならば、それは体であることを示せ。[5 点]

8. $K$ を 0 でない標数 $p$ をもつ体とする。$f : K \to K$ を $f(a) = a^p$ で定めると $f$ は単射であることを示せ。[5 点]

9. $G$ を群、$H$, $K$ を $G$ の部分群とする。$a, b \in G$ に対して $b = hak$ となる $h \in H$ と $k \in K$ が存在するときに $a \sim b$ と定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]