代数入門 (期末試験 2008/7/28)

1. $M_n(\mathbb{C})$ を複素数を成分とする n 次正方行列全体のなす集合とする。$M_n(\mathbb{C})$ の乗法 (通常の行列の積) について、結合法則が成り立つことを示せ。[5 点]

2. n を正の整数とする。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元 $a + n\mathbb{Z}$ を具体的に記述せよ。

   (2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の加法

   $$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$$

   は、矛盾なく定義できることを示せ。

3. m, n を互いに素な (最大公約数が 1 である) 自然数とする。$f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f(a + mn\mathbb{Z}) = (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$ は全単射であることを示せ。[5 点]

4. G を群とし $a \in G$ とする。$H = \{g \in G \mid g^{-1}ag = a\}$ とおくと H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

5. G を群、H を G の部分群とする。$x, y \in G$ に対して $x^{-1}y \in H$ であるときに $x \sim y$ であるとして、G 上の関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]

6. $M_2(\mathbb{C})$ を複素数体上の 2 次全行列環とする。

   $$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\}$$

   とおく。[5 点 $\times$ 4]

   (1) R は $M_2(\mathbb{C})$ の部分環であることを示せ。

   (2) I は R のイデアルであることを示せ。

   (3) R の正則元を決定せよ。

   (4) R の右零因子、左零因子を決定せよ。

7. R を整域とする。R 上の n 変数多項式環 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ も整域であることを示せ。[5 点]

8. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ は体であることを示せ。[5 点]

[5 点 $\times$ 12 問 $=$ 60 点満点]