

代数入門・期末試験 (2009/07/27)

- 次の各問に答えよ。[5 点 × 3]
 - 環のイデアルの定義を書け。
 - 可換でない環の例を書け。
 - 整域であって体ではないものの例を書け。
- R を整域とし $0 \neq a \in R$ とする。このとき、写像 $f : R \rightarrow R$ を $f(x) = ax$ で定めれば、 f は単射であることを示せ。[5 点]
- R を単位元をもつ環とする。 $a, b \in R$ に対して R の正則元 u が存在して $b = au$ となるときに $a \sim b$ と定める。このとき \sim は R 上の同値関係であることを示せ。[5 点]
- 可換環 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ を考える。[5 点 × 2]
 - $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の単数をすべて書け。(答のみでよい。)
 - $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の零因子をすべて書け。(答のみでよい。)
- 全行列環 $R = M(2, \mathbb{R})$ を考え

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく。[5 点 × 2]

- S は R の部分環であることを示せ。
 - S は体であることを示せ。
- R, S を環とする。写像 $f : R \rightarrow S$ について、任意の $a, b \in R$ に対して

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

が成り立つものとする。[5 点 × 3]

- $f(0_R) = 0_S$ と $f(-a) = -f(a)$ が成り立つことを示せ。
- $f(R)$ は S の部分環であることを示せ。
- $f^{-1}(0_S) = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$ は R のイデアルであることを示せ。

[5 点 × 12 = 60 点満点]