代数入門・期末試験 (2010/07/26)

1. 環の部分環の定義を書け。[5 点]

2. R を環とし $a \in R$ とする。$C = \{r \in R \mid ar = ra\}$ は R の部分環になることを示せ。[5 点]

3. I, J を環 R のイデアルとするとき $I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}$ も R のイデアルであることを示せ。[5 点]

4. 体 K のイデアルは K と $\{0\}$ しかないことを示せ。[5 点]

5. R を整域とし、$0 \neq a \in R$ とする。このとき、写像 $f : R \to R$, $f(r) = ar$ は単射であることを示せ。[5 点]

6. n を自然数とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ によって矛盾なく積が定義できることを示せ。[5 点]

7. $373x + 256y = 1$ をみたす整数の組 (x, y) を一組求めよ。[5 点]

8. p を素数とし、体 $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考える。$f : K \to K$ を $f(a) = a^p$ で定めれば、これは全単射であることを示せ。[5 点]

9. $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ とし、

   $$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d), \quad (a, b)(c, d) = (ad + bc, bd)$$

   で積と和を定義する。[5 点 $\times$ 2]

   (1) この積に関して結合法則が成り立つことを示せ。

   (2) この和と積で R は単位元を持つ可換環になる (証明不要)。$(a, b) \in R$ が正則元となるための条件を a, b に関する条件として書き、そのときの (a, b) の逆元を求めよ。

10. R を整域とし $S = \{a \in R \mid a \neq 0\}$ とおく。$(a, m), (b, n) \in R \times S$ に対して $(a, m) \sim (b, n)$ であることを $an = bm$ となることで定める。[5 点 $\times$ 2]

    (1) $\sim$ は $R \times S$ 上の同値関係であることを示せ。

    (2) (a, m) を含む同値類を a/m と表すことにする。このとき商集合 $(R \times S)/\sim$ に $a/m + b/n = (an + bm)/mn$ で、矛盾なく加法が定義できることを示せ。

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]