

代数入門・筆答レポート問題 (第一回 2011/05/30)

1. 以下のものは、半群、モノイド、群、そのいずれでもない、のどれであるか、最も適当なものを答えよ。(ただし演算が定まっていなくても“定めたもの”という書き方をしているので注意すること。また答のみを書けばよく、説明は不要である。) [3点 × 5]

- (1) 集合 $A = \{2\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ に通常の加法で演算を定めたもの
- (2) 集合 $A = \{2\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ に通常の乗法で演算を定めたもの
- (3) 集合 X から X への写像全体の集合に、写像の合成で演算を定めたもの
- (4) 実数を成分とする n 次正則行列全体の集合に通常の加法で演算を定めたもの
- (5) 実数を成分とする n 次正則行列全体の集合に通常の乗法で演算を定めたもの

2. $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ に以下のような演算を定める。 [5点 × 3]

$$(a, b, c)(d, e, f) = (2af + bd, be, 2cf)$$

- (1) この演算が結合法則をみたすことを示せ。
 - (2) この演算について A の単位元を求めよ。
 - (3) $(a, b, c) \in A$ が正則元であるための必要十分条件を a, b, c に関する条件で書け。また、この条件がみたされるとき、 (a, b, c) の逆元を求めよ。
3. 1 より大きい整数 n を一つ固定する。 $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して $a - b = nl$ なる $l \in \mathbb{Z}$ が存在するとき $a \sim b$ として、 \mathbb{Z} 上の関係 \sim を定める。 [5点 × 3]
- (1) \sim は同値関係であることを示せ。
 - (2) \sim に関して $a \in \mathbb{Z}$ を含む同値類を \bar{a} と表すことにする。また同値類全体の集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表すことにする。このとき、写像 $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{a+b}$ が矛盾なく定義されることを示せ。
 - (3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ には乗法 $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ が定義され、この乗法によって $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ はモノイドとなる(証明不要)。 $n = 8$ として、このモノイドの単元群(単数群)を求めよ。
4. M をモノイドとし u は M の正則元であるとする。このとき $f: M \rightarrow M$ を $f(a) = ua$ で定めれば f は全単射であることを示せ。 [5点]
5. G を群、 H, K を G の部分群とする。このとき $H \cap K$ も G の部分群であることを示せ。 [5点]
6. G をアーベル群とする。自然数 n に対して $H = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ とおくと、 H は G の部分群となることを示せ。 [5点]

[3点 × 5 + 5点 × 9 = 60点満点]