

代数入門・筆答レポート問題 (第二回 2011/07/25)

1. 次のようなものの例をそれぞれ一つ答えよ。[3点 × 5]

- (1) 可換でない環
- (2) 整域でない可換環
- (3) 体でない整域
- (4) 単位元をもたない環
- (5) 標数 7 の体

2. R を単位元 1_R をもつ環とする。 $a \in R$ を固定し、写像 $f: R \rightarrow R$ を $f(x) = ax$ で定める。 1_R が f の像に含まれるならば f は全射であることを示せ。[5点]

3. R を整域とし、 $0 \neq a \in R$ を固定する。このとき、写像 $f: R \rightarrow R$ を $f(x) = ax$ で定めれば f は単射であることを示せ。[5点]

4. R を可換環とし $a \in R$ とする。 $I = \{x \in R \mid ax = 0\}$ とおくと I は R のイデアルであることを示せ。[5点]

5. $M_2(\mathbb{C})$ は複素数体 \mathbb{C} 上 2 次の全行列環を表すものとし、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

とおく。[5点 × 3]

- (1) R は $M_2(\mathbb{C})$ の部分環であることを示せ。
- (2) R の単数群を求めよ。
- (3) R の左零因子をすべて求めよ。

6. 224 と 67 の最大公約数 d を求め、 $224x + 67y = d$ となる整数の組 (x, y) を一組求めよ。[5点]

7. $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とする。 F は体である。[5点 × 2]

- (1) $f(x) = x^2 + x + 1 \in F[x]$ は既約であることを示せ。
- (2) $g(x) = x \in F[x]$ とする。剰余環 $K = F[x]/f(x)F[x]$ において $\overline{g(x)}$ の逆元を求めよ。ただし $\overline{g(x)} = g(x) + f(x)F[x] \in K$ である。

[3点 × 5 + 5点 × 9 = 60点満点]