

## 代数入門筆答レポート (第二回 2012/07/23)

1. 以下の条件を満たす例をそれぞれ一つ、具体的に書け。(意味がはっきりと分かるように書くこと。それが条件を満たす理由の説明は不要である。) [3点 × 5]

- (1) 単位元をもたない環 (2) 非可換な環  
(3) 体ではない整域 (4) 標数が0ではない体  
(5) 単位元をもつ可換環であって整域ではないもの

2.  $R$  を整域とする。  $a \in R, a \neq 0$  として  $f: R \rightarrow R$  を  $f(x) = ax$  で定めると、  $f$  は単射になることを示せ。 [5点]

3.  $m, n$  を互いに素な自然数とする。

$$f: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f(a + mn\mathbb{Z}) = (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$$

を考える。

- (1) 写像  $f$  が矛盾なく定義されることを示せ。 [5点]  
(2)  $f$  は全単射であることを示せ。 [5点]

4.  $R$  を環とし  $I$  と  $J$  を  $R$  のイデアルであるとする。このとき

$$I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

は  $R$  のイデアルであることを示せ。 [5点]

5. 6887 と 4897 の最大公約数  $d$  を求め、  $6887x + 4897y = d$  となる整数の組  $(x, y)$  を求めよ。 [5点]

6.  $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  とする。

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4 \in F[x], \quad g(x) = 3x^2 + x + 2 \in F[x]$$

に対して  $f(x)$  を  $g(x)$  で割った商と余りを求めよ。 [5点]

7.  $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  とする。  $R$  の正則元と零因子をすべて求めよ。 [5点]

8.  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  は複素数体  $\mathbb{C}$  の部分環であり、更に体であることを示せ。 [5点]

9.  $q$  を自然数とし  $F$  をちょうど  $q$  個の元からなる体とする。このとき、任意の  $a \in F$  に対して  $a^q = a$  であることを示せ。 [5点]

$$[(3 \text{ 点} \times 5) + (5 \text{ 点} \times 9) = 60 \text{ 点満点}]$$