

代数入門筆答レポート (第二回 2012/07/23)

1. 以下の条件を満たす例をそれぞれ一つ、具体的に書け。(意味がはっきりと分かるように書くこと。それが条件を満たす理由の説明は不要である。) [3点 × 5]

- (1) 単位元をもたない環 (2) 非可換な環
(3) 体ではない整域 (4) 標数が0ではない体
(5) 単位元をもつ可換環であって整域ではないもの

2. R を整域とする。 $a \in R, a \neq 0$ として $f: R \rightarrow R$ を $f(x) = ax$ で定めると、 f は単射になることを示せ。 [5点]

3. m, n を互いに素な自然数とする。

$$f: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f(a + mn\mathbb{Z}) = (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$$

を考える。

- (1) 写像 f が矛盾なく定義されることを示せ。 [5点]
(2) f は全単射であることを示せ。 [5点]

4. R を環とし I と J を R のイデアルであるとする。このとき

$$I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

は R のイデアルであることを示せ。 [5点]

5. 6887 と 4897 の最大公約数 d を求め、 $6887x + 4897y = d$ となる整数の組 (x, y) を求めよ。 [5点]

6. $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ とする。

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4 \in F[x], \quad g(x) = 3x^2 + x + 2 \in F[x]$$

に対して $f(x)$ を $g(x)$ で割った商と余りを求めよ。 [5点]

7. $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ とする。 R の正則元と零因子をすべて求めよ。 [5点]

8. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ は複素数体 \mathbb{C} の部分環であり、更に体であることを示せ。 [5点]

9. q を自然数とし F をちょうど q 個の元からなる体とする。このとき、任意の $a \in F$ に対して $a^q = a$ であることを示せ。 [5点]

$$[(3 \text{ 点} \times 5) + (5 \text{ 点} \times 9) = 60 \text{ 点満点}]$$