代数入門演習 (第一回 2013/04/15)

1. $A=\{1,2\}$, $B=\{x,y\}$ とする。

   (1) A から B への写像をすべて書け。

   (2) $B\times B$ から B への写像 f で、

   「任意の $a,b,c\in B$ に対して $f(a,f(b,c))=f(f(a,b),c)$ が成り立つ」

   ものを一つ見つけよ。

2. 以下のような性質をもつ例を具体的に構成せよ。

   (1) 集合 A から A への写像で、単射であって全射ではない (集合 A も明示すること)。

   (2) 集合 A から A への写像で、全射であって単射ではない (集合 A も明示すること)。

3. A, B, C を集合とし、二つの写像 $f:A\to B,\ \ g:B\to C$ を考える。

   (1) f と g が共に単射ならば合成写像 $g\circ f$ も単射であることを示せ。

   (2) f と g が共に全射ならば $g\circ f$ も全射であることを示せ。

   (3) $g\circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。

   (4) $g\circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。

4. 写像 $f:A\to B$, $g:B\to A$ について $f\circ g$, $g\circ f$ が共に全単射であるとする。このとき f は全単射であることを示せ。

5. 三つの写像 $f:A\to B$, $g:A\to B$, $h:B\to C$ を考える。$h\circ f=h\circ g$ かつ h は単射であるとする。このとき $f=g$ であることを示せ。

6. 写像 $f:A\to B$ を考える。A の部分集合 X,Y について $f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y)$ が成り立つかどうかを考え、成り立つならばそれを証明し、成り立たないならば反例を一つ構成せよ。

7. 写像 $f:A\to B$ を考える。A の部分集合 X,Y について $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$ が成り立つかどうかを考え、成り立つならばそれを証明し、成り立たないならば反例を一つ構成せよ。

8. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ をそれぞれ n 次正方行列とする。$(AB)C=A(BC)$ が成り立つことを示せ。

代数入門演習 (第二回 2013/04/22)

1. 同値関係の定義を書け。

2. n を自然数とし固定する。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $a - b = n\ell$ となるとき $a \equiv b \pmod{n}$ と定める。この関係 $\equiv \pmod{n}$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。

3. $M_n(\mathbb{C})$ を複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合とする。$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、ある正則行列 P があって $B = P^{-1}AP$ となるとき $A \sim B$ と書いて A と B は**相似**であるという。関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。

4. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし W をその部分空間とする。$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対して $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$ のとき $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}'$ と書くことにする。このとき関係 $\sim$ は V 上の同値関係であることを示せ。

5. 前問の記号を続けて用いる。$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}'$ かつ $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}'$ であるならば $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}'$ であることを示せ。(これによって同値類の集合 V/W に加法が矛盾なく定義される。)

6. 順序関係の定義を答えよ。

7. 全順序集合ではない順序集合の例を一つ挙げよ。

8. $a, b \in \mathbb{N}$ に対して $a \mid b$ とは a が b の約数であることとする。

   (1) 関係 $\mid$ は $\mathbb{N}$ の順序であることを示せ。

   (2) $A = \{1, 2, \cdots, 10\}$ とし、A を上の関係で $\mathbb{N}$ の順序部分集合と見る。このとき A の極大元、極小元をすべて求めよ。また A に最大元、最小元が存在するならば、それを答えよ。

9. 順序集合の最大元は極大元であることを示せ。

10. 整列集合の定義を書け。また整列集合の例、整列集合ではない全順序集合の例を書け。

11. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射を具体的に構成せよ。

12. 開区間 $(0, 1)$ から $\mathbb{R}$ への全単射を具体的に構成せよ。

13. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} - \{0\}$ への全単射を具体的に構成せよ。

代数入門演習 (第三回 2013/05/08)

1. $A = \{0, 1\}$ は通常の乗法によって半群になっている。このとき**演算表** (乗法表) を

	0	1
0	0	0
1	0	1

のように書く。$A = \{0, 1, -1\}$ も通常の乗法によって半群になっている。この半群の乗法表を書け。

2. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に $(a + 3\mathbb{Z}) + (b + 3\mathbb{Z}) = (a + b) + 3\mathbb{Z}$ で加法を定義する。このときの演算表を書け。また $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に $(a + 3\mathbb{Z})(b + 3\mathbb{Z}) = ab + 3\mathbb{Z}$ で乗法を定義したときの演算表を書け。

3. $A = \{a, b\}$ を半群とする。$aa = b$, $ab = a$ とするとき ba, bb を求めよ。またこの半群の乗法表を書き、それがモノイドかどうかを判定せよ。

4. 集合 A に演算を 任意の $x, y \in A$ に対して $xy = y$ で定める。このとき、この演算が結合法則を満たすことを示せ。また、これがモノイドであるかどうかを判定せよ。

5. $P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ に次のような演算を定義する。

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2,\ y_1y_2)$$

   (1) P はこの演算でモノイドになることを示せ。また単位元を求めよ。
   (2) P の正則元を決定し、その逆元を求めよ。

6. $Q = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ に次のような演算を定義する。

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1x_2,\ x_1y_2 + y_1z_2,\ z_1z_2)$$

   (1) Q はこの演算でモノイドになることを示せ。また単位元を求めよ。
   (2) Q は可換ではないことを示せ。
   (3) Q の正則元を決定し、その逆元を求めよ。

7. モノイドの単位元はただ一つであることを示せ。

8. A をモノイドとし u を A の正則元とする。写像 $f : A \to A$ を $f(a) = au$ で定めると、f は全単射になることを示せ。

9. A をモノイドとする。$a, b \in A$ に対して $b = au$ なる正則元 u が存在するとき $a \sim b$ として、関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。

代数入門演習 (第四回 2013/05/13)

1. 以下のものは、半群、モノイド、群、そのいずれでもないか、最も適当なものをそれぞれ答えよ。

   (1) 集合 $\{0,1\}$ で通常の加法を演算とするもの。

   (2) 集合 $\{0,1\}$ で通常の乗法を演算とするもの。

   (3) 集合 $\{-1,1\}$ で通常の乗法を演算とするもの。

   (4) 集合 $\{-1,0,1\}$ で通常の乗法を演算とするもの。

   (5) 実数を成分とする n 次正方行列の全体で通常の加法を演算とするもの。

   (6) 実数を成分とする n 次正方行列の全体で通常の乗法を演算とするもの。

2. $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像 f_i $(i=1,\cdots,6)$ を次のように定める。

$$f_1(z)=z,\quad f_2(z)=1-z,\quad f_3(z)=\frac{1}{z},$$

$$f_4(z)=\frac{1}{1-z},\quad f_5(z)=\frac{z-1}{z},\quad f_6(z)=\frac{z}{z-1}$$

   (0 で割ることは気にしなくてよい。)
   $G=\{f_i \mid i=1,\cdots,6\}$ とおき、写像の合成を演算とする演算表を作れ。またそれが群になることを確認せよ。

3. $A=\{1,2,\cdots,n\}$ とする。A から A への全単射 を A 上の置換という。置換 σ を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

   と表すことにする。

   (1) $n=3$ とするとき A 上の置換を全て書け。

   (2) 写像の合成で置換の積を定義する。$n=3$ として、このときの乗法表を作れ。

   (3) 乗法表から気付くことを何でもよいので書け。

4. 有理整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は乗法に関してモノイドである。$\mathbb{Z}$ の正則元を決定せよ。

5. $M_n(\mathbb{Z})$ で整数を成分とする n 次正方行列全体の集合を表す。$M_n(\mathbb{Z})$ は通常の行列の積によってモノイドとなる。$M_n(\mathbb{Z})$ の正則元を決定せよ。(難しければ、まず $n=2$ として考えよ。)

代数入門演習 (第五回 2013/05/20)

1. H を群 G の部分群とし、$g \in G$ とする。このとき $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} \mid x \in H\}$ も G の部分群であることを示せ。

2. G を群とし $a \in G$ とする。$C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$ は G の部分群であることを示せ。

3. $\mathbb{R}$ 上の一般線型群 $GL_n(\mathbb{R})$ を考え、$O(n) = \{T \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tTT = E\}$ とおく。このとき $O(n)$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。ただし E は単位行列を表し ${}^tT$ は T の転置行列を表すものとする。($O(n)$ を n 次**直交群**という。)

4. S_n を集合 $\{1, \cdots, n\}$ 上の対称群 (n 次対称群) とする。$H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ は S_n の部分群であることを示せ。

5. 自然数 n に対して $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ とおけば、$n\mathbb{Z}$ は加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ。

6. G を群とし H をその部分群とする。$a, b \in G$ に対して $a^{-1}b \in H$ であるときに $a \sim b$ と書くことにする。このとき $\sim$ は G 上の同値関係であることを示せ。

7. G を有限群とし H をその部分群とする。$a \in G$ について $|aH| = |H|$ であることを示せ。

8. G を群とし $a \in G$ を固定する。写像 $f : G \to G$ を $f(x) = a^{-1}xa$ で定める。このとき、任意の $x, y \in G$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ であることを示せ。

9. G, H を群とし、写像 $f : G \to H$ を考え、任意の $x, y \in G$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$ が成り立つとする。このとき $f(1_G) = 1_H$ であり、任意の $x \in G$ に対して $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ であることを示せ。

代数入門演習 (第六回 2013/05/27)

1. [第五回問 6 再掲] G を群とし H をその部分群とする。$a, b \in G$ に対して $a^{-1}b \in H$ であるときに $a \sim b$ と書くことにする。このとき $\sim$ は G 上の同値関係であることを示せ。

2. G を群とする。$a \in G$ に対して $C_G(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ とおいてこれを G における a の**中心化群**という。

   (1) [第五回問 2 再掲] $C_G(a)$ は G の部分群であることを示せ。

   (2) $x, y \in G$ に対して以下の条件は同値であることを示せ。

   (a) $x^{-1}ax = y^{-1}ay$

   (b) $xy^{-1} \in C_G(a)$

   (c) $C_G(a)x = C_G(a)y$

   (3) G が有限群であるとき $\{x^{-1}ax \mid x \in G\}$ はちょうど $|G|/|C_G(a)|$ 個の元を含むことを示せ。

3. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において

$$A = (1,1),\ B = (-1,1),\ C = (-1,-1),\ D = (1,-1)$$

とする。正方形 $ABCD$ を考え、それをそれ自身に移すような変換を考える。これは $\{A, B, C, D\}$ 上の置換と考えられる。例えば

$$x = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}$$

はそのようなものである。

   (1) 正方形 $ABCD$ をそれ自身に移すような $\{A, B, C, D\}$ 上の置換をすべて書け。

   (2) (1) で求めたものはすべて x, y の積で書けることを確認せよ。(群の任意の元が x と y の積で書けるので $\{x, y\}$ を群の**生成系**という。x, y を**生成元**という。)

   (3) $x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^3y$ を確認せよ。(生成元の間に成り立つ関係を**基本関係**という。このとき $G = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^3y\rangle$ と書く。)

   (4) x, y の任意の積は x^iy^j $(0 \le i < 4,\ 0 \le j < 2)$ と書けることを示せ。

   (5) (1) で求めたものを $\mathbb{R}^2$ 上の一次変換と見て行列で表せ。ただし $\mathbb{R}^2$ は列ベクトルの空間と見て、行列は左からかけるものとする。

   (6) 置換の積と (5) で求めた行列の積との関係を調べよ。

代数入門演習 (第七回 2013/06/10)

1. R を整域とする。$a, b, x \in R$ とし $x \neq 0$ とする。このとき $ax = bx$ ならば $a = b$ であることを示せ。

2. 整域であって体ではないものの例を一つ答えよ。

3. R を環とする。$e \in R$ で $e^2 = e$ となるものを R の**べき等元**という。R が単位元 1 をもつとし、e が R のべき等元であるならば $1 - e$ もべき等元であることを示せ。

4. R を単位元 1 をもつ環とする。$x \in R$ に対してある自然数 n があって $x^n = 0$ であるとする (このような x を**べき零元**という)。このとき $1 - x$ は正則元であることを示せ。

5. $\mathbb{C}$ 上 2 次の全行列環 $M(2, \mathbb{C})$ の元で、零元でも単位元でもないべき等元を一つ見つけよ。また零元でないべき零元を一つ見つけよ。

6. A を半群とする。$e \in A$ が A の**左単位元**であるとは、「任意の $a \in A$ に対して $ea = a$」が成り立つこととする。また、$f \in A$ が A の**右単位元**であるとは、「任意の $a \in A$ に対して $af = a$」が成り立つこととする。

   $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ とおいて、行列の通常の積を演算とすれば、これは半群となる。この半群には右単位元はあるが左単位元は存在しないことを示せ。

7. 半群 A が左単位元と右単位元をもつならば、A は単位元をもつことを示せ。

8. A を 1 を単位元とするモノイドとする。$a \in A$ に対して、$b \in A$ が a の **左逆元**であるとは、$ba = 1$ となることとする。また b が a の **右逆元**であるとは、$ab = 1$ となることとする。

   A を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像全体の集合とする。A は写像の合成を演算として、恒等写像 $id_{\mathbb{N}}$ を単位元とするモノイドになる。$f \in A$ を $f(a) = a+1$ で定める。f は左逆元をもつが、右逆元をもたないことを示せ。また、$z \in \mathbb{N}$ に対して $g_z \in A$ を

   $$g_z(a) = \begin{cases} a - 1 & (a \geq 2) \\ z & (a = 1) \end{cases}$$

   で定める。g_z は右逆元をもつが、左逆元をもたないことを示せ。

9. モノイド A の元 a が左逆元と右逆元をもつならば、a は逆元をもつことを示せ。

代数入門演習 (第八回 2013/06/17)

1. R を環とする。$C = \{r \in R \mid ar = ra \quad \text{for } \forall a \in R\}$ とおくと C は R の部分環であることを示せ。

2. $R = M_2(\mathbb{R})$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上 2 次の全行列環とする。すなわち $\mathbb{R}$ の元を成分とする 2 次の正方行列の全体である。

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \,\middle|\, a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{Q} \right\}$$

のような記号を用いる。以下の集合が R の部分環であるかどうかを判定せよ。

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

3. R を単位元をもつ環とし $a \in R$ を固定する。写像 $f : R \to R$ を $f(x) = xa$ で定める。このとき次を示せ。

   (1) $f^{-1}(0) = \{0\}$ と f が単射であることは同値である。(f^{-1} は写像ではない。$f^{-1}(0) = \{x \in R \mid f(x) = 0\}$ である。)

   (2) $1 \in f(R)$ と f が全射であることは同値である。

4. R_1, R_2 を単位元をもつ環とする。集合としての直積 $R_1 \times R_2$ に以下のように加法と乗法を定める。

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2), \quad (r_1, r_2)(s_1, s_2) = (r_1 s_1, r_2 s_2)$$

このとき、この演算によって $R_1 \times R_2$ は環になる。これを R_1 と R_2 の**直和**といい $R_1 \oplus R_2$ と書く。

   (1) $R_1 \oplus R_2$ の零元と (乗法に関する) 単位元を求めよ。

   (2) $R_1 \oplus R_2$ の正則元と左 (右) 零因子を R_1, R_2 の正則元と左 (右) 零因子を用いて決定せよ。

5. 可換環 $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を考え $S = 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{3a + 12\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ とする。

   (1) S の元をすべて書け。また S は R の部分環であることを示せ。

   (2) R と S に単位元が存在するかどうか調べ、存在するならばそれを求めよ。

代数入門演習 (第九回 2013/6/24)

1. I を環 R のイデアルとする。I は R の部分環であることを示せ。

2. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ のイデアルを考える。$n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルであることを示せ。

3. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ において、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルである (問 2)。逆に $\mathbb{Z}$ のイデアルはこの形のものに限ることを以下の方針で示せ。

   - I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとする。$I = \{0\}$ ならば $I = 0\mathbb{Z}$ である。
   - I を $\mathbb{Z}$ の $\{0\}$ でないイデアルとすると I は正の数を含む。
   - n を I に含まれる最小の正の数とすると $I = n\mathbb{Z}$ である。

4. R を環とし I, J をそのイデアルとする。このとき $I \cap J$, $I + J$ も R のイデアルであることを示せ。ただし $I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}$ である。また $I \cup J$ はイデアルとは限らない。そのような例を具体的に一つ示せ。

5. $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ と $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ は何であるかを考察せよ。(分かりにくければ、まず $m = 4$, $n = 6$ として考えよ。)

6. R を環とし $a \in R$ とする。$aR = \{ar \mid r \in R\}$ は R の右イデアルであることを示せ。また $\{rar' \mid r, r' \in R\}$ は R のイデアルであるとは限らないことを反例をあげることによって示せ (やや難しい)。

7. I を可換環 R のイデアルとする。

   $$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x^n \in I\}$$

   とおく。このとき $\sqrt{I}$ は R のイデアルであることを示せ。($\sqrt{I}$ を I の**根基イデアル**という。)

8. I を単位元をもつ環 R のイデアルとする。このとき $1 \in I$ であることと $I = R$ であることは同値である。これを示せ。

9. 環 R のイデアル I が**極大イデアル**であるとは、I を含む R のイデアルが I と R 以外に存在しないことである。

   R を単位元をもつ環とする。R は少なくとも一つの極大イデアルをもつことを示せ。(Zorn の補題を用いる。)

代数入門演習 (第十回 2013/07/01)

1. $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とすると、これは体である。多項式環 $F[x]$ で $f(x) = x^5 + 2x + 3$ を $g(x) = 2x^3 + 1$ で割った商と余りを求めよ。

2. K を体とする (分かりにくければ $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ と思ってもよい)。K 上の一変数多項式環 $K[x]$ の任意のイデアルが単項イデアルであることを以下の方針で示せ。

   (1) I を $K[x]$ のイデアルとする。$I = 0$ ならば $I = 0K[x]$ である。

   (2) $I \neq 0$ とする。I に含まれる 0 でない多項式のうち、次数最小のものを一つ取り、これを $h(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$ とする。

   (3) 任意の $f(x) \in K[x]$ に対して $f(x)h(x) \in I$ である。よって $h(x)K[x] \subset I$ となる。

   (4) $f(x) \in I$ とする。$f(x) = q(x)h(x)$ となる $q(x) \in K[x]$ が存在する。よって $f(x) \in h(x)K[x]$ となり $h(x)K[x] \supset I$ となる。

3. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^3 - 1$ とする。$f(x)a(x) + g(x)b(x) = 1$ となる $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ を見つけよ。($\mathbb{Z}$ におけるユークリッドの互除法を参考にせよ。)

4. 多項式としては等しくないが、それが定める関数が等しくなるような例を構成せよ。

5. 実数体 $\mathbb{R}$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を考える。非負整数 ℓ に対して、$\mathbb{R}[x]$ のイデアル $I = x^{\ell+1}\mathbb{R}[x]$ を考え、剰余環 $\mathbb{R}[x]/I$ を考える。$\mathbb{R}[x]/I$ の演算は、多項式の $(\ell+1)$ 次以上の項を無視するものと考えてよい。

   (1) $\mathbb{R}[x]/I$ の単数を決定せよ。

   (2) $\mathbb{R}[x]/I$ のイデアルをすべて決定せよ。

   (難しければ、まず $\ell = 1, 2$ あたりで考えよ。)

6. R を整域とし、多項式環 $R[x]$ を考える。$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ に対して $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$ を $f(x)$ の**形式的微分**という。

   (1) $f(x) = x^\ell,\ g(x) = x^m$ として微分公式 $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を示せ。(一般に $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成り立つが、証明はやや難しいので省略してよい。次の問題ではこれを用いてよい。)

   (2) $\alpha \in R$ が $f(x)$ の**重根**であるとは $(x-\alpha)^2 \mid f(x)$ であることとする。$\alpha \in R$ が $f(x)$ の重根であることと $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ であることは同値であることを示せ。

代数入門演習 (第十一回 2013/07/08)

1. $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ とすると、これは体である。多項式環 $F[x]$ で $f(x) = 2x^4 + x^2 + 1$ を $g(x) = 3x^2 + 1$ で割った商と余りを求めよ。

2. K を有限体、すなわち $|K| < \infty$ なる体、とし、その標数を p とする。$f : K \to K$ $(f(a) = a^p)$ を考える。

   (1) 任意の $a, b \in K$ に対して $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ となることを示せ。

   (2) f は全単射であることを示せ。

3. $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x - 1$ とする。剰余環 $\mathbb{Q}[x]/f(x)\mathbb{Q}[x]$ において $\overline{g(x)} = g(x) + f(x)\mathbb{Q}[x]$ の逆元を求めよ。

4. $\alpha \in \mathbb{C}$ をある一変数有理数係数多項式の根の一つとする。$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を $f(\alpha) = 0$ となる次数最小、かつ最高次係数が 1 である多項式とする。(これを α の**最小多項式**という。)

   (1) $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が $g(\alpha) = 0$ をみたすならば $g(x)$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。

   (2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の最小多項式を求めよ。

5. $\mathbb{R}^4$ に以下のように積を定める。

$$\begin{aligned} & (a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) \\ = \ & (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,\ a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1, \\ & a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - d_2b_1,\ a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

   また加法は通常のベクトルのように対応する成分同士で行うこととする。

   (1) $x(y+z) = xy + xz$ が成り立つことを確認せよ。(分配法則を確認するには $(x+y)z = xz + yz$ も確認する必要がある。)

   (2) 乗法の結合法則などが確認でき、この演算で $\mathbb{R}^4$ は環になる。(確認しなくてもよい。) これが非可換環であることを確認せよ。

   (3) この環の零元 (加法に関する単位元) と単位元 (乗法に関する単位元) を求めよ。

   (4) $(a, b, c, d)(a, -b, -c, -d)$ を計算せよ。

   (5) (4) を用いて、この環が斜体であることを示せ。(これを**ハミルトンの四元数体**といい $\mathbb{H}$ という記号で書かれることが多い。)

代数入門演習 (第十二回 2013/07/18)

1. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元を係数とする次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

2. R を整域とし $|R| < \infty$ とする。このとき R は体であることを示せ。

3. K を体とする。多項式 $f(x) \in K[x]$ は写像 $f^* : K \to K,\ f^*(a) = f(a)$ を定める。このように多項式で定義される写像を**多項式写像**という。以下、$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする。

   (1) K 上の次数が 1 以下の多項式をすべて書け。

   (2) (1) の多項式が定める写像をすべて書け。

   (3) K から K への任意の写像は多項式写像であることを確認せよ。(同じことが任意の有限体上で成り立つ。余裕があれば $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし、2 次以下の多項式をすべて考え、同様のことを示せ。)

4. K を体とし、$|K| > n$ とする。$f(x), g(x) \in K[x]$ について、$\deg f(x) \leq n, \deg g(x) \leq n$ とし、更に $f(x) \neq g(x)$ と仮定する。このとき $f^* \neq g^*$ であることを示せ。(f^* の定義は前問を参照すること。)

5. K を標数 0 の体とする。K 係数の既約多項式は重根を持たないことを示せ。(第十回問 6 参照)

6. 次の各問に答えよ。

   (1) 位数 n の巡回群 $\langle a \rangle$ を考える。$1 \leq i < n$ に対して $\langle a \rangle = \langle a^i \rangle$ となるための必要十分条件は n と i が互いに素であることである。これを示せ。

   (2) 自然数 n に対して、n と互いに素な i $(1 \leq i < n)$ の個数を $\varphi(n)$ で表し、φ を**オイラー関数**という。次の等式を示せ。

$$n = \sum_{m|n} \varphi(m)$$

   (3) 体 K の単数群 $U(K)$ の有限部分群 H は巡回群であることを示せ。(やや難しい。$|H| = n$ とするとき、H に位数 n の元があることを示せばよい。)

代数入門演習 (第十三回 2013/07/22)

1. R を単位元 1_R をもつ環とする。$a \in R$ に対して $(-1_R)a = -a$ であることを示せ (記号の意味をよく考えて答えること)。

2. 以下で定義される $R \subset M_2(\mathbb{R})$ を考える。

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   (1) R は $M_2(\mathbb{R})$ の部分環であることを示せ。

   (2) R は体であることを示せ。

3. R を環とし、I, J を R のイデアルとする。このとき $I \cap J$ と $I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}$ は R のイデアルであることを示せ。

4. R を単位元をもつ可換環とする。$a \in R$ が**べき零元**であるとは $a^n = 0$ となる自然数 n が存在することである。R のべき零元全体の集合を I とおく。このとき I は R のイデアルであることを示せ。

5. R を単位元をもつ環とする。$0 \neq e \in R$ が**べき等元**であるとは $e^2 = e$ となることである。このとき $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ は R の部分環になることを示せ。また eRe が単位元をもつかどうかを考察せよ。

6. $79x + 97y = 1$ となる整数の組 (x, y) を求めよ。

7. 体 $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ において (乗法に関する) 7 の逆元を求めよ。

8. $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ とする。$f(x) = x^3 + 2,\ g(x) = x^2 + 3$ とする。剰余環 $K[x]/f(x)K[x]$ において $\overline{g(x)} = g(x) + f(x)K[x]$ の逆元を求めよ。(まず $f(x)A(x) + g(x)B(x) = 1$ となる $A(x), B(x) \in K[x]$ を求めよ。)

9. $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ とする。F 上 2 次一般線形群 $GL_2(F)$ を考える。

   (1) $GL_2(F)$ の元を全て書け。

   (2) $GL_2(F)$ の位数を答えよ。

   (3) (1) で求めた各要素に対して、その位数を答えよ。