

代数入門筆答レポート (第二回 2013/07/29, 訂正版)

1. R を環、 I を R のイデアルとする。 $a, b \in R$ に対して $a \sim b$ を $a - b \in I$ となることで定める。

- (1) \sim は同値関係であることを示せ。 [5 点]
(2) $a \in R$ を含む \sim に関する同値類を \bar{a} で表す。また同値類全体の集合を \overline{R} で表す。写像 $f: \overline{R} \times \overline{R} \rightarrow \overline{R}$, $f(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{ab}$ が矛盾なく定義できることを示せ。 [5 点]

2. R, S を環とする。写像 $f: R \rightarrow S$ は、任意の $a, b \in R$ に対して

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

をみたすものとする。このとき次の問に答えよ。

- (1) $f(0_R) = 0_S$ であることと $f(-a) = -f(a)$ であることを示せ。 [5 点]
(2) $f(R)$ は S の部分環であることを示せ。 [5 点]
(3) $f^{-1}(0_S) = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$ は R のイデアルであることを示せ。 [5 点]
3. 単位元をもつ環 R の正則元は左零因子ではないことを示せ。 [5 点]
4. R を整域とし R の集合としての濃度が有限であるとする。このとき R は体であることを示せ。 [5 点]
5. R を可換環とし、 R 上の一変数多項式環 $R[x]$ を考える。 $f(x) \in R[x]$ に対して $f^*: R \rightarrow R$ を $f^*(r) = f(r)$ で定め、これを f の定める多項式写像という。多項式としては異なる $f(x), g(x) \in R[x]$ であって $f^* = g^*$ となるような例を一つ答えよ。その際 R が何であるかも明確にすること。 [5 点]
6. 可換環 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の正則元をすべて答えよ。 [5 点]
7. 次の問に答えよ。
- (1) 7493 と 9017 の最大公約数 d を求めよ。 [5 点]
(2) $7493x + 9017y = d$ となる整数の組 (x, y) を一組求めよ。 [5 点]
8. $\mathbb{Z}/67\mathbb{Z}$ における方程式 $13x = 3$ を解け。 ($13x \equiv 3 \pmod{67}$ という意味である。) [5 点]

[5 点 \times 12 = 60 点満点]