代数入門筆答レポート (第一回 2014/06/02)

1. 次の条件をみたすものの例を具体的に書け。ただし集合と演算が明確になるように注意して答えること。[各 5 点]
   (1) 結合法則をみたさない二項演算
   (2) モノイドでない半群
   (3) 可換でない群

2. $A = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ とし、A に
$$(a,b)(c,d) = (ac+bd, ad+bc)$$
で演算を定義する。[各 5 点]
   (1) この演算が結合法則をみたすことを示せ。
   (2) この演算に関する単位元を求めよ。また $(a,b) \in A$ が正則元であるための条件を、a,b に関する式で書け。
   (3) (a,b) が正則であるとき、その逆元を求めよ。

3. $A = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ とする。$(a,b),(c,d) \in A$ に対して、$ad = bc$ であるとき $(a,b) \sim (c,d)$ として A 上の関係 $\sim$ を定める。[各 5 点]
   (1) $\sim$ が同値関係であることを示せ。
   (2) (a,b) を含む同値類を $[a,b]$ と表すことにする。$[a,b][c,d] = [ac,bd]$ で $A/\sim$ の演算が矛盾なく定義できることを示せ。

4. G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f : G \to G$ を $f(x) = a^{-1}xa$ で定める。このとき f は全単射であることを示せ。[5 点]

5. G を群とする。G の任意の元 x に対して $x^2 = 1_G$ が成り立つとする。このとき G はアーベル群であることを示せ。[5 点]

6. 有理整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を加法群と見る。また n を自然数とする。このとき $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ。[5 点]

7. A はモノイドであり、集合として有限集合であるとする。左簡約法則「$a,b,c \in A$ に対して $ab = ac$ ならば $b = c$」が成り立つならば A は群であることを示せ。[5 点]

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]