

代数入門筆答レポート (第二回 2014/07/28)

1. 以下のことが正しいかどうかを 〇 か × で答えよ。[完答 10 点、不正解毎に 3 点減点、4 問以上不正解で 0 点]

- (1) 体は整域である。
- (2) 単位元をもつ環で 0 以外のすべての元が正則であるものは体である。
- (3) 体上の n 変数多項式環は整域である。
- (4) R を整域とする。 $a, x, y \in R$ に対して $ax = ay$ ならば $x = y$ である。
- (5) 単位元をもつ可換環を係数とする一変数 n 次多項式の根は高々 n 個である。

2. $R = M_2(\mathbb{R})$ を 2 次の全行列環とする。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく。次の問に答えよ。[5 点 × 3]

- (1) S は R の部分環であることを示せ。
 - (2) S の単数 (正則元) を決定せよ。
 - (3) T は S のイデアルであることを示せ。
3. R を整域とし、 S で R の 0 でない元全体の集合を表すことにする。 $(a, x), (b, y) \in R \times S$ に対して $(a, x) \sim (b, y)$ を $ay = bx$ となることで定める。次の問に答えよ。[5 点 × 2]

- (1) \sim は $R \times S$ 上の同値関係であることを示せ。
- (2) $Q = (R \times S) / \sim$ とし、 (a, x) を含む同値類を $[a, x]$ で表す。このとき $[a, x] + [b, y] = [ay + bx, xy]$ によって Q に演算が定義できることを示せ。

4. 次の問に答えよ。[5 点 × 2]

- (1) 25063 と 18247 の最大公約数 d を求めよ。
- (2) $25063x + 18247y = d$ となる整数の組 (x, y) を一組求めよ。

5. a と b は互いに素な自然数であるとする。このとき、任意の自然数 c に対して

$$\frac{c}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

となる整数の組 (x, y) が存在することを示せ。[5 点]

6. p が素数であるとき $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体であることを示せ。[5 点]

7. F をちょうど 9 個の要素をもつ体とする。 F の単数群 $F^* = F - \{0\}$ は巡回群であることを示せ。[5 点]

[10 点 + 5 点 × 10 = 60 点満点]