

代数入門・筆答レポート (第一回 2016/06/06)

1. 次の条件をみたすようなものの具体例を書け。ただし、考える集合、演算などが明確になるように注意して答えること。[3点 × 5]

- (1) 集合とその上の結合法則をみたさない演算。
- (2) 半群であってモノイドでないもの。
- (3) モノイドであって群でないもの。
- (4) アーベル群でない群。
- (5) 無限群とその有限部分群。

2. n を自然数とする。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の演算 $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されることを示せ。[5点]

3. $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ とし、 A に演算を

$$(a, b)(c, d) = (-ac, -ad - bc)$$

で定める。[5点 × 3]

- (1) A はこの演算でモノイドであることを示せ。
 - (2) (a, b) が正則元であるための必要十分条件を a, b に関する条件として書け。
 - (3) (a, b) が正則元であるとき、その逆元を求めよ。
4. G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f: G \rightarrow G$ を $f(g) = ga$ で定めると、 f は全単射であることを示せ。[5点]
5. G を群とし $a \in G$ とする。 $C_G(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$ とおくと $C_G(a)$ は G の部分群となることを示せ。[5点]
6. G を群とする。 $a, b \in G$ に対し $b = g^{-1}ag$ となる $g \in G$ が存在するとき $a \sim b$ として、 G 上の関係 \sim を定める。[5点 × 2]
- (1) \sim が同値関係であることを示せ。
 - (2) G を有限群とするとき、 $a \in G$ を含む \sim による同値類は、ちょうど $|G : C_G(a)|$ 個の要素をもつことを示せ。ただし $C_G(a)$ は問 5 で定めたものとする。
7. G を群とし $a \in G$ とする。 $a^n = 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するとする。 $a^n = 1$ となる最小の $n \in \mathbb{N}$ を n_0 とする。このとき $a^n = 1$ ならば n_0 は n を割り切ることを示せ。[5点]

[(3点 × 5) + (5点 × 9) = 60点満点]