# 代数入門・筆答レポート (第二回 2016/07/25)

1. 1233 と 2133 の最大公約数 $d$ を求め、$1233a + 2133b = d$ となる整数の組 $(a, b)$ を一組求めよ。[5 点]

2. $\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$ において $\overline{7} = 7 + 128\mathbb{Z}$ の逆元を求めよ。[5 点]

3. $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ とし $F$ 係数多項式 $2x^4 + 3x^3 + 1$ を $3x^2 + x + 1$ で割った商と余りを求めよ。ただし $F$ の元はすべて 0 から 6 までの整数で表すこと。[5 点]

4. $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ の正則元と零因子をすべて書け。(0 は零因子とはいわないことにする。) [5 点]

5. $X = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ とする。$(a, b), (c, d) \in X$ に対して、$ad = bc$ であるとき $(a, b) \sim (c, d)$ として $X$ 上の関係 $\sim$ を定める。[5 点 × 2]

   (1) $\sim$ が同値関係であることを示せ。

   (2) $(a, b)$ を含む同値類を $[a, b]$ と表すことにする。$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$ で $X/\sim$ の加法が矛盾なく定義できることを示せ。

6. $R$ を単位元をもつ環とする。$R$ の正則元 $u$ に対して、その逆元はただ一つ存在することを示せ。[5 点]

7. 環 $R$ の零元 $0_R$ を考える。任意の $r \in R$ に対して $r0_R = 0_R$ が成り立つことを示せ。(自明な式であるが、環、および零元の定義のみを用いて答えること。) [5 点]

8. 実数体 $\mathbb{R}$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を考える。$S = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = 0\}$ とおくと、$S$ は $\mathbb{R}[x]$ のイデアルであることを示せ。[5 点]

9. $R$ を環とし $a \in R$ とする。$S = \{r \in R \mid ar = ra\}$ とおくと $S$ は $R$ の部分環であることを示せ。[5 点]

10. $R$ を整域とする。[5 点 × 2]

    (1) $0 \neq a \in R$ を固定する。$f : R \to R$ を $f(x) = ax$ で定めれば、これは単射であることを示せ。

    (2) $R$ が集合として有限集合であるならば $R$ は体であることを示せ。

11. $F$ をちょうど $q$ 個の元を持つ有限体とする。$f(x) = x^q - x \in F[x]$ とする。[5 点 × 2]

    (1) 任意の $a \in F$ に対して $f(a) = 0$ であることを示せ。

    (2) $g(x) \in F[x]$ が「任意の $a \in F$ に対して $g(a) = 0$」をみたすならば $f(x) \mid g(x)$ であることを示せ。

[5 点 × 14 = 70 点満点]