代数入門・筆答レポート (第一回 2017/05/29)

1. M をモノイドとし u を M の正則元とする。写像 $f : M \to M$ を $f(m) = mu$ で定めれば f は全単射であることを示せ。[5 点]

2. G を群とし H を G の部分群とする。$x, y \in G$ とする。$xy^{-1} \in H$ であるときに $x \sim y$ と定める。このとき $\sim$ は G 上の同値関係であることを示せ。[5 点]

3. G を群とし、任意の $a \in G$ が $a^2 = 1_G$ をみたすとする。このとき G はアーベル群であることを示せ。[5 点]

4. G を実数を成分とする 2 次正則行列全体のなす乗法を演算とする群とする (一般線形群)。$H = \{A \in G \mid {}^t\!AA = E\}$ とすると H は G の部分群であることを示せ。ただし ${}^t\!A$ は A の転置行列、E は単位行列を表すものとする。[5 点]

5. n, m を自然数とする。写像 $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f(a + m\mathbb{Z}) = a + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されるための m, n に関する必要十分条件を答えよ。[5 点]

6. G を群とし $g \in G$ とする。ある自然数 m に対して $g^m = 1_G$ であるとする。$n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid g^m = 1_G\}$ とおく。このとき $g^\ell = 1_G$ であることと $n \mid \ell$ であることは同値であることを示せ。[5 点]

7. $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ とし、S に演算を $(a, b)(c, d) = (ac, ad)$ で定める。[5 点 $\times$ 2]
   (1) この演算が結合法則をみたすことを示せ。
   (2) S がモノイドであるかどうかを判定せよ。(答のみでなく、理由も書くこと。)

8. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ を考える。[5 点 $\times$ 2]
   (1) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の乗法に関するモノイドとしての単数群を求めよ。
   (2) (1) で求めた単数群が巡回群かどうかを判定せよ。(答のみでなく、理由も書くこと。)

9. 3 次対称群 S_3 を考える。[5 点 $\times$ 2]
   (1) S_3 の元をすべて書け。(答のみでよい。)
   (2) (1) の各元について、その位数を求めよ。(答のみでよい。)

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]