

代数入門・筆答レポート (第二回 2017/07/24, 修正版)

1. d を 47083 と 61661 の最大公約数とする。 $47083x + 61661y = d$ となる整数の組 (x, y) を一つ求めよ。 [5 点]
2. $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$ における $\overline{70} = 70 + 131\mathbb{Z}$ の逆元を求めよ。 [5 点]
3. $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ の単数群の元としての $\overline{3} = 3 + 32\mathbb{Z}$ の位数を求めよ。 [5 点]
4. $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ 上の多項式 $f(x) = \overline{8}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{5}$ を $g(x) = \overline{5}x^2 + \overline{5}x + \overline{1}$ で割った商と余りを求めよ。ただし多項式の係数は $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{10}$ の形で答えること。 [5 点]
5. 単位元をもつ可換環の零因子は正則元ではないことを示せ。 [5 点]
6. n が合成数 (2 以上で素数ではない自然数) であるとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は整域ではないことを示せ。 [5 点]
7. R を単位元をもつ環とし $a \in R$ とする。写像 $f: R \rightarrow R$ を $f(x) = ax$ で定める。 [5 点 \times 2]
 - (1) f が全射であることと $1_R \in f(R)$ であることは同値であることを示せ。
 - (2) f が単射であることと $f^{-1}(0) = \{0\}$ であることは同値であることを示せ。
8. R を環とする。写像 $f: R \rightarrow R$ は、任意の $a, b \in R$ に対して
$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b)$$
をみたすとする。 [5 点 \times 3]
 - (1) $f(0) = 0$ であること、および、任意の $a \in R$ に対して $f(-a) = -f(a)$ であることを示せ。
 - (2) $f(R)$ は R の部分環であることを示せ。
 - (3) $f^{-1}(0)$ は R のイデアルであることを示せ。
9. p を素数とし F を標数 p の体とする。写像 $f: F \rightarrow F$ を $f(\alpha) = \alpha^p$ で定めると、これは単射であることを示せ。 [5 点]
10. $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の 3 次既約一変数多項式 (2 次以下の式の積に分解しないもの) をすべて求めよ。

[5 点 \times 13 = 65 点満点]